CF1654G Snowy Mountain

> - 给定一棵 n 个点的树，其中每个点可能是黑色或白色。
> - 一个点的高度定义为其距离最近黑色节点的距离。
> - 你初始在 i 号节点上，势能为 0，可以做以下两种操作：
> - 向高度更小的相邻节点移动，增加 1 的势能。
> - 向高度相同的相邻节点移动，减少 1 的势能，这个操作只能在你的势能 ≥ 1 时执行。
> - 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$，求出你能做的操作数的最大值。
> - $n \leq 2 \times 10^5$。

如果遇到一个平台，则可以在上面反复横跳，使得势能减小到 0，然后接着走完（一定可以向下走）。

策略上：走一条路径，使得经过的最低的平台最低（此时一定可以在这个平台上清空已有势能，所以答案只和经过的最后一个平台有关）。

一个暴力是：从一个点出发 bfs，找到它出发能到的最低的平台。但是，不同的平台高度只有 $\sqrt{n}$ 种，可以反过来，从每种高度的平台出发开始 bfs。

货币

> n 个国家按照顺序排成一行，有 m 次事件，第 i 次事件代表国家 (u, v) 的货币可以流通。
>
> 请选择一个最短的连续区间 $[l, r]$，使得按照顺序访问 $[l, r]$ 的国家之后可以搜集所有种类的货币。
> $1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq m \leq 2 \cdot 10^5$，强制在线。

一个想法是设 $nxt_{i,c}$ 表示 i 之后的颜色 c 的第一个出现位置，设 $f_l = \max_c nxt_{l,c}$，那么答案就是 $\min f_l - l + 1$。但是这个 nxt 涉及的修改面过广，有没有修改位置能少的办法？

设 nxt_0 表示 f_1，nxt_i 表示 i 之后第一个和 i 相同的颜色的位置，那么：$f_l = \max_{i<l} nxt_i$。由于启发式合并，nxt 只会被修改 $O(n \log n)$ 次。

f 是递增的，一次 nxt_i 被修改，只会影响到一个区间，这个区间里的所有 $f = nxt_i$。那么这个区间会被分裂为若干个小连续段，可以在线段树上二分找到这些连续段。由于每次只会合并 $O(1)$ 个连续段，所以势能总的上升空间只有 nxt 修改次数级别，也就是 $O(n \log n)$ 的。总复杂度 $O(n \log^2 n)$。

Eclipse

> 给定两个长度为 n 的非负整数序列 a, b。
>
> 对于一个长度为 n 的非负整数序列 c 以及两个非负整数 x, y，定义 $f(c, x, y) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - c_i x| + |b_i - c_i y|$。
>
> 你需要求出 $f(c, x, y)$ 的最小值。
>
> $n \leq 30, a, b \leq 10^8$。

多元函数求最值有一个**调整法**：固定除了一个变量之外的所有变量，剩下一个一元函数求最值的问题。

考虑 x，固定 c, y：x 一定在 $|a_i - c_i x|$ 的一个零点上，整数化后就是某一个 $\lfloor \frac{a_i}{c} \rfloor$ 或者 $\lceil \frac{a_i}{c} \rceil$，一共只有 $V^{0.5}$。

考虑 c_i，固定 x,y：这是两个折一次函数相加，主要肯定在斜率更大的那一个。不妨设 $x>y$，那么 c_i 为 $\lfloor\frac{a_i}{x}\rfloor$ 或者 $\lceil\frac{a_i}{x}\rceil$，具体是哪一个可以列出一个不等式。

那么我们枚举 x，然后对于每个 i，将 y 的取值分成 $O(1)$ 段，每一段确定是选 $c_i=\lfloor\frac{a_i}{x}\rfloor$ 或者 $\lceil\frac{a_i}{x}\rceil$，那么一共有 $O(n)$ 段，对于每一段分别求个最值即可。

Covering The Range

> 给定 m 个区间 $[l_i,r_i]$，每一个单位时间中你会等概率随机地获得这 m 个区间中的恰好一个（可能会重复获得之前已经获得过的区间）。
>
> 如果在某一个单位时间结束的时刻，你获得的所有区间的并集为 $[1,n]$，那么这个过程会立即结束。
>
> 你需要求出这个过程期望要多少单位时间才能结束。答案对 998244353 取模。
>
> **保证给定的 m 个区间的并集为 $[1,n]$。**
>
> $n,m\le 3000$。

首先可以转化成如下的 dp：

$$f_{i,j}=\sum_{k<i}f_{k,j-calc(k,i)} \tag{1}$$

这个可以插值，对于每个点值，用区间乘法的线段树就行了。