

## 翻转 (reverse)

给定一个数组，每次询问一个长度为  $2^k$  的区间 ( $k$  在询问时给定) 是不是优美的，优美当且仅当它经过蝴蝶变换 (每个元素的下标 bit reverse) 后的结果不变。  $n, q \leq 10^5$ 。

我们考虑递归求出一个区间原本的和蝴蝶变换后的哈希序列。设  $f_{i,j}$  表示区间  $[i, i + 2^j)$  蝴蝶变换后和哈希序列，只要求出这个，就能快速回答询问。

一个想法是枚举一个回文的前缀和后缀，这个的枚举量只有  $O(\sqrt{n})$ ，但是这不够优秀，我们只枚举第一位和最后一位就可以了。设  $f/g_{i,j,k}$  表示蝴蝶变换前/后  $i$  开始、 $2^j$  个数、以  $2^k$  为跨度，就可以转移了：

$$\begin{aligned} f_{i,j,k} &= f_{i,j-2,k+1} + f_{i+2^k,j-2,k+1} + f_{i+2^{k+j-1},j-2,k+1} + f_{i+2^{k+j-1}+2^k,j-2,k+1} \\ g_{i,j,k} &= g_{i,j-2,k+1} + g_{i+2^{k+j-1},j-2,k+1} + g_{i+2^k,j-2,k+1} + g_{i+2^{k+j-1}+2^k,j-2,k+1} \end{aligned} \quad (1)$$

复杂度  $O(n \log^2 n)$ ，需要把  $j$  作为第一维并滚动数组，这样比较快。

## 序列 (seq)

定义一个序列  $[b_1, b_2, \dots, b_m]$  是可可爱的，当且仅当可以将这个序列中的每一个数分到两个非空集合中，使得第一个集合中的每一个数按位与的结果等于第二个集合中每个数按位或的结果。例如序列  $[1, 7, 3, 11]$  是可可爱的，因为可以划分为  $[7, 11]$  和  $[1, 3]$ ，第一个集合中的每一个数按位与的结果为  $3$ ，第二个集合中每个数按位或的结果也为  $3$ 。现在给出一个长度为  $n$  的序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，又给出  $Q$  组询问，每组询问形如  $l_i, r_i$ ，你需要回答  $[a_{l_i}, a_{l_i+1}, \dots, a_{r_i}]$  这个序列是否是可爱的。  $n, q \leq 10^5$ 。

设或等于与等于  $x$ ，那么大于  $x$  的值都是与，小于  $x$  的都是或，等于  $x$  的不一定，所以可以  $O(nQ \log n)$  得到 41 分。

事实上，只需要枚举  $\text{popcount}(x)$ ，大于的都是与，小于的都是或，等于的都必须等于  $x$ 。结合猫树分治可以做到  $O(q \log^2 n)$ 。

## [PA 2022] Chodzenie po linie

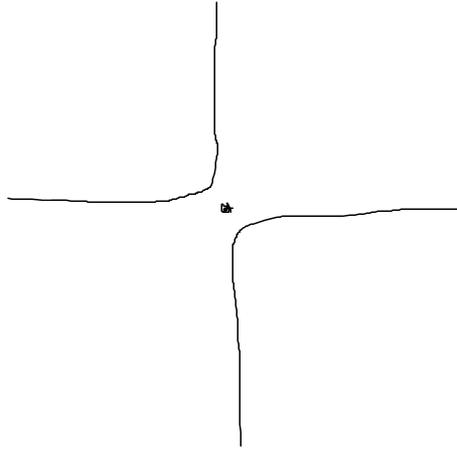
Byteasar 是世界著名的马戏团演员，他擅长走钢丝，并在钢丝之间穿行。在他著名的表演中，马戏团帐篷的天花板下拉了  $n$  条钢丝。如果我们俯瞰帐篷，并将其放置在坐标系中，第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 条钢丝连接点  $(i, 0)$  和点  $(p_i, 1)$ ，其中序列  $p_1, p_2, \dots, p_n$  是  $1$  到  $n$  整数的一个排列。

Byteasar 站在其中一条钢丝上开始表演，并让观众给他一些钢丝的编号。他的目标是站在观众所说的那条钢丝上面。Byteasar 非常善于沿钢丝移动，但从一条钢丝移动到另一条钢丝是相当复杂的。因为他非常勇敢，但并不愚蠢，只有两条钢丝相交时，他才能从一条钢丝移到另一条钢丝上。所有的钢丝都悬挂在相似的高度，所以这样的移动总能成功，但这是相当累人的。出于这个原因，Byteasar 将选择一条不同钢丝之间交点个数最少的路线。唯一的例外是当以这种方式不可能到达目标钢丝的情况——在这种情况下，Byteasar 将礼貌地感谢观众并回到后台，从而不进行任何穿越。

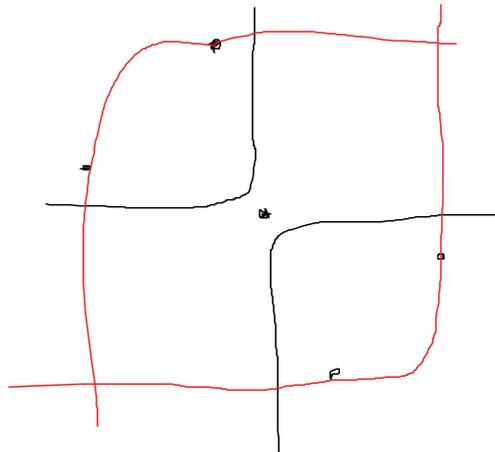
然而，Byteasar 不确定他应该从哪根钢丝开始他的表演。对于这些钢丝的每一根，他都想知道对于观众所有可能的选择，他最少经过交点个数的和。帮他写一个程序来计算这些值。  $1 \leq n \leq 200\,000$ 。

把钢丝看成是点  $(i, p_i)$ ，那么两根钢丝相交就是一个逆序对。

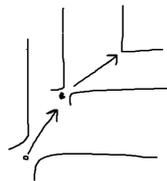
第一步能到达的就是半平面：



下一步，试图尽可能扩大：



然后发现一共需要记下两个坐标，空余的平面永远是右上的一个平面或者左下的一个平面。而事实上，这两个平面的移动是彼此独立的：



我们对  $(x, y)$  记忆化，然后事实上这个  $(x, y)$  的总数量是  $O(n^{1.5})$  级别的。手写哈希表优化一下，即可通过。

## [PA 2022] Nawiasowe podziały

给出一个长度为  $n$  且仅由字符 `(` 和 `)` 组成的字符串，以及一个数字  $k$ ，这个字符串不一定是合法的括号序列。你的任务是把它分成  $k$  个非空段（每个字符必须恰好属于一段内），使得每段中是合法括号序列的子串个数之和最小。  $1 \leq k \leq n \leq 100\,000$ 。

首先 wqs 二分  $k$ ，然后考虑 dp，设  $f_i$  表示前  $i$  个的最小代价。猜想这有决策单调性。但是怎么计算区间的贡献？

对于每个左括号，都有一个它匹配的右括号；匹配的右括号的右侧可能又有一个左括号……这构成了一条链：

```
1 ( ) ( ) ( ) ( )
```

开个桶，对每条链分别记下它当前有多少个括号，即可莫队维护。但是这是  $1D$  的决策单调性，怎么使用分治呢？我们可以先 cdq 分治，再用分治来分阶段转移，复杂度  $O(n \log^3 n)$ 。