「雅礼集训 2017 Day5」珠宝

> Miranda 准备去市里最有名的珠宝展览会，展览会有可以购买珠宝，但可惜的是只能现金支付，Miranda 十分纠结究竟要带多少的现金，假如现金带多了，就会比较危险，假如带少了，看到想买的右买不到。展览中总共有 N 种珠宝，每种珠宝都只有一个，对于第 i 种珠宝，它的售价为 C_i 万元，对 Miranda 的吸引力为 V_i。Miranda 总共可以从银行中取出 K 万元，现在她想知道，假如她最终带了 i 万元去展览会，她能买到的珠宝对她的吸引力最大可以是多少？
> $1 \le N \le 1000000, 1 \le K \le 50000, 1 \le C_i \le 300, 0 \le V_i \le 10^9$。

C_i 只有 300，对于每个 C_i 相同的物品，按照 V_i 从大到小排序，每次肯定只取最大的几个；转移的时候，C_i 剩余系下相同的组，每组之间是独立的，而组内的转移满足四边形不等式，可以用分治来维护向量乘以蒙日矩阵。

【UNR #5】航天飞机调度

> **这是一道交互题。**
>
> 最终，UOI 主席亲自向大家宣布了大D米 AK UOI 的消息，会场响起了经久不衰的掌声与欢呼声。
>
> 然而天下没有不散的宴席，终于到了大家需要各自坐航天飞机回去的疏散日。此时，你的电话铃声响起，原来是两只外星老鼠舒克和贝塔打来的，他们的银河系航空公司在疏散日这天遭遇了难以解决的客流高峰。
>
> 银河系的星球近似地分布在了一张平面上。舒克和贝塔的航空公司控制了 n 个星球的航天飞机机场，这 n 个机场的位置在地图上可看做一个正 n 边形的 n 个顶点，**按顺时针依次编号为 $1, 2, \cdots, n$**。
>
> 舒克和贝塔的航空公司掌握着这 n 个机场间的 $2n-3$ 条双向航线，且他们**恰好构成了这个正 n 边形的所有边和一个三角剖分**。也即，如果把机场作为点，航线作为线画在地图上，那么我们可以看到这些航线只可能在端点处相交，且最外围的航线构成了那个正 n 边形的边，而正 n 边形内部被其他航线完全分成了一个个三角形。
>
> 现在由于航空需求的瞬间增长，绝大部分飞机行程已被排满，**仅有两架飞机处于空闲状态**。初始它们分别停在 x 和 y 号机场。通过往年同期 UOI 客流数据的分析，舒克和贝塔预见到，按照时间顺序接下来会依次出现 q 次客流紧张事件，每次事件发生在某个特定的机场。每次事件发生后，舒克和贝塔需要选择两架空闲飞机中的**恰好**一架调度到对应机场增开航班缓解客流压力。保证在某个客流紧张事件结束之前，下一个客流紧张事件不会发生。某个客流紧张事件结束后对应的空闲飞机会飞回这次客流紧张事件发生的机场并恢复空闲状态。
>
> 对于每条航线，舒克和贝塔给出了一个正整数价值。为了尽可能早地到达对应机场缓解客流压力，舒克和贝塔将某架空闲飞机从机场 a 调度到当前客流紧张事件发生的机场 b 时，会选择从机场 a 到 b 的一条由若干航线 **(可以没有任何航线)** 构成的路径，满足其途径的航线的价值和是所有连接 a, b 的路径中最小的。如果有多个这样的路径，他们会选择任意一条。同时为了保证航班日程表不产生过多的调整，舒克和贝塔不希望在调度飞机处理客流紧张事件以外进行额外的调度。
>
> 需要注意的是，每一次客流紧张事件发生时，舒克和贝塔可以任选两架飞机中的一架去到对应机场，而不需要比较它们需要经过的航线的价值和。特别地，即使当前客流紧张事件发生的机场停靠了一架处于空闲状态的飞机，舒克和贝塔也可以选择调度另一架飞机到当前机场。
>
> 在满足了这些条件之后，舒克和贝塔最后的想法是在这些客流紧张事件中小赚一笔。具体地，舒克和贝塔希望在依次解决 q 次客流紧张事件并且航班安排满足上述要求的情况下，调度两架飞机经过的所有航线的**价值和最大**。一条航线经过多次，价值也计算对应多次。为了不为难你，舒克和贝塔只需要你给出这个最大值就可以了。
>
> 为了保护商业机密，舒克和贝塔并不能为你直接提供航线地图和每条航线的价值。幸运的是，他们允许你在他们的航线地图存储系统上进行至多 L 次询问，每次你可以给出两个机场 p, q，存储系统会计算出一条连接 p, q 的由若干航线构成的路径使得其是所有连接 p, q 的由若干航线构成的路径 **(路径可以不包含任何航线)** 中价值和最小的，并告诉你它的价值和。
>
> 对于 100% 的数据，$3 \le n \le 5 \times 10^4, 1 \le x, y \le n, 1 \le q \le 3 \times 10^4, L = 2 \times 10^6, 1 \le v \le 10^9$。

我们设 $f_i(q)$ 表示一个飞机在 p_i 号点，一个飞机在 q 号点时，最大的贡献。转移方程为：

$$f_{i+1}(p_i) = \max_j \{f_i(j) + \text{dis}(j, p_i)\} \tag{1}$$

我们考虑这个 $\text{dis}(i, j)$ 矩阵，因为 $x < y < u < v$，(x, u) 路径和 (y, v) 路径肯定在中间某个 w 点相交，那么：

$$\text{dis}(x, u) + \text{dis}(y, v) = \text{dis}(x, w) + \text{dis}(w, u) + \text{dis}(y, w) + \text{dis}(w, v) \ge \text{dis}(x, v) + \text{dis}(y, u) \tag{2}$$

所以这个几乎满足四边形不等式，我们把这个矩阵平移一下成这个样子：

```
x   x   x   x
    x   x   x   x
        x   x   x   x
            x   x   x   x
```

也就是限制只能是 $\text{dis}(u,v)$ 其中 $u<v$，u,v 可以大于 n。于是我们就有了一个蒙日矩阵，而每次都是列加法，不影响它依然是蒙日矩阵；查询行最小值，我们就一开始直接求出每一行最大值的位置，修改一列的时候只会使得一个区间里的最大值变成这一列，我们就二分出这一个区间并覆盖就行。

「KDOI-03」序列变换

> 给定一个长度为 n 的 01 序列 a 和 q 次询问，询问参数 k。
>
> 每次询问给定 L,R，其中 $1\le L\le R\le n$，你可以进行如下操作：
>
> - 选择一个下标 $L<i\le R$；
> - 将 a_{i-1} 赋值为 $a_{i-1}\oplus a_i$，a_{i+1} 赋值为 $a_{i+1}\oplus a_i$。如果 $i=n$，则不对 a_{i+1} 作出改变。其中 $\oplus$ 表示按位异或运算。
>
> 求使得 $[L,R]$ 区间内至多有 k 个 1 的最小操作次数。询问之间相互独立，也就是说，每次询问后重置为初始序列。$2\le n\le 3\,000$，$1\le k\le \min(n,1\,000)$，$1\le q\le 5\times 10^5$。

首先把 a 前缀异或和一下，每次操作变成交换两个位置，要求交换完 1 的连续段数量不超过 $\frac{k}{2}$，求最小交换次数（特别地，对于紧贴着右边界的 1，这一段的贡献只有 1）。

设 $F_{l,r}$ 表示把区间 $[l,r]$ 内的 1 都并成一段的最小代价，$G_{l,r}$ 表示把区间内的 1 都并成一段且靠在最右边的最小代价。把这个 F 稍微处理一下就能变成一个蒙日矩阵的形式，所求的也就是 $F^{\frac{k}{2}}$ 或者 $F^{\frac{k}{2}}G$。

结合 $O(n^2)$ 的蒙日矩阵乘法和快速幂就可以得到 $n^2\log n+q$ 的做法。

在此稍微提一下蒙日矩阵乘法的 $O(n^2)$ 做法：设 $C_{i,j}=\max A_{i,k}+B_{k,j}$ 的最优解在 $k=P_{i,j}$ 处取到，那么一定有：

$$P_{i-1,j}\le P_{i,j}\le P_{i+1,j} \tag{3}$$

那么按照 $j-i=\text{const}$ 的对角线从下向上 dp，每一条对角线的复杂度都是 $O(n)$ 的。

事实上，单位蒙日矩阵乘法是可以做到 $O(n\log_2 n$ 的，并且单点求值也就是一个二维数点问题。

「Wdoi-2」禁断之门对面，是此世还是彼世

> 给定一场长度为 n 的正整数序列 a 和一个长度为 m 的正整数序列 b。
>
> 现在蓝根据序列 a 与序列 b 构造了一个 n 行 m 列的正整数矩阵 A 满足 $A_{i,j}=a_ib_j$，你需要构造 $n+1$ 行 t 列的正整数矩阵 B 满足以下条件：
>
> - 矩阵的每个元素取值在 $[1,m]$ 间；
> - 矩阵同一行的元素**两两**不相同；
> - 矩阵的每列**相邻元素**不同；
> - 在所有满足上面三项要求的矩阵中**最小化**下式：
> $f(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{t}\sum\limits_{k=\min(B_{i,j},B_{i+1,j})}^{\max(B_{i,j},B_{i+1,j})}A_{i,k}$
>
> 请输出构造出的 B 矩阵的 $f(B)$ 的值模 10^9+7 的结果。对于全部数据，保证 $1\le a_i,b_i\le 10^9$，$1\le n,m,t\le 5\times 10^5$，$t\le m$。保证数据有解。

对于最优解，一定满足 $B_1=B_3=B_5=\cdots$，$B_2=B_4=\cdots$。我们要最小化的就是一些 $\text{sum}[l,r]$，其中 l 两两不同，r 两两不同。可以看作是一个图，A 是点，区间是一些有向边，每个点最多一个入度和一个出度，每条边的权值就是 $\text{sum}[l,r]$。我们要找到符合条件的 t 条边，使得总权值最小。

容易发现肯定只有 $a\to b\to c\to d\to e$ 这样的链或者 $a\to b\to c\to a$ 这样的二元环或者三元环（多元环可以拆成一个三元环和一个链，一定更优）。并且，这个关于 t 是凸的，我们可以 wqs 二分把 t 去掉。

设 f_i 表示前 i 个点的最大贡献，转移时，环都很容易，链的话结合整体差分可以很轻松地用前缀和优化来解决。

[usaco2023 January Contest, Platinum T3] Subtree Activation

> 给定一棵有根树，每个点有一个 0，每次可以把每个点异或上一个 1，使得对于每个子树，都存在一个时刻，使得这个子树内的每个点都是 1，其它都是 0。问最小操作次数。

dsu 理论最小操作次数？一个错误的 dp：f_u 表示 u 子树的最小开销，然后枚举“重儿子”进行转移。但是这样是错误的。因为有可能存在一个子树是 1，然后把它的一些点改成 0，剩下一个子树全是 1 的情况。

csy 的方法：$2\sum size-$ 最大哈密顿路径长度，哈密顿路径上一条边的边权为这两个子树之间的编辑距离，那么可以 $f_{u.i}$ 表示 u 子树内有 i 个线头的方式来 dp，转移是一个闵可夫斯基和，可以可并堆维护。$O(n\log n)$。

一个可能正确的方法：f_u 表示 u 子树内全是 0，进行 dsu 的最小花费，g_u 表示子树内全是 1 的花费。然后也可以简单转移。$O(n)$。

hdu6757 Hunting Monsters/nflsoj

> 有 n 个项目，第 i 个项目会花费 a_i 元，得到 b_i 元的利润。不保证 $a_i\leqslant b_i$。显然钱的总量在任意时刻都必须是自然数。
>
> 请问最开始至少有多少钱时，能够完成至少 k 个项目。对于 $k=1,2,3,\cdots,n$，都请求出结果。

首先按照 Johnson 序排序，挣钱的项目肯定是能干的都干，依次干就行了；亏本的项目按照亏本的金额排序，依次能干的就干，这个是不满足“干过则初始资金增大了则还会干”，所以不能直接拿数据结构维护。

我们从后往前维护一个 dp 数组，$f_{i,j}$ 表示后 i 个项目，初始 j 块钱，会进行多少次。可以拿可持久化平衡树维护。

正经做法是，调换一下 dp 的下标和值，设 $f_{i,k}$ 表示后 i 个项目，要达成 k 个项目，至少需要多少初始资金。加入一个项目时，只有一个后缀的 f 需要加上这个项目，用平衡树维护就好，tag 实际上就是 (sum,max) 的半群。

投影对称

> 给定平面上的 n 个整点 (x_i,y_i)，将 n 个点投影到一条直线 l 上会形成一个 n 元可重点集 E_l。若一条过原点的直线 l 称为“好的”，则存在直线上一点 P 使得 E_l 关于 P 对称。
>
> 直线上的一个可重点集关于 P 对称的定义为：除去与 P 重合的点，其余点可以两两配对，使得每对点关于 P 对称。求有多少条“好的”直线。注意可能会有无穷多条的情况，这时输出 -1。

假设已经确定了 l，并且 u, v 是对称点，u, v 的中点是 O，那么 P 点是 O 对 l 的垂足。我们获得了一个确定 l 的方法。

事实上，我们可以求出全局的重心 H，那么 P 是 H 对 l 的垂足。枚举 1 号点的对称点 u，若它们的中点和 H 重合，那么它们在任何一条 l 上都是对称的，删掉这两个点；否则，我们可以根据 OP 垂直 l 的条件唯一确定 l，判定即可。

xor

> 给定 n, d，求：
>
> $$\text{ans} = \sum_{0 \le x,y,z < n} (x \oplus y \oplus z)^d \bmod 998244353 \tag{4}$$
>
> $n \le 2^{30}, d \le 10^5$。

我们枚举 x, y, z 是到哪一位上开始小于 n 的，设三者中最高的自由位是 h，那么 h 之后的位是完全自由的，每一位的出现次数是完全相同的，求出这个出现次数，然后就变成了一个 d 次方前缀和问题。