Problem 1~5

2021年9月22日 19:50

Day1 T2 传送 (teleport)

事实上，我们可以得到一个重要的引理：

引理：	序列 a 合法，当且仅当 $\forall(u,v)\in E, \lvert a_u-a_v\rvert \le w_{(u,v)}$。
证明：	使用归纳法，设 $\lvert a_u-a_v\rvert \le dis_{u,v}$ 且 $\lvert a_v-a_w\rvert \le dis_{v,w}$，那么考虑将这两个不等式拆成四个不等式，再将其两两配对，即可得到 $\lvert a_u-a_w\rvert \le dis_{u,v}+dis_{v,w}\le dis_{u,w}$，于是我们就可以由所有相邻点之间的关系推出任意两点间的关系。证明完毕。

于是，我们可以得到一个只记录当前节点状态 dp：设 $f_{i,u}$ 为 u 号点权值为 i 时，u 子树内是否可行。
进一步，我们发现：合法的 f 一定是一段区间。于是易得：

$$[l_u,r_u]=\bigoplus_{s\in son_u}[l_s-w_{u,s},r_s+w_{u,s}]$$

我们可以直接二分（$O(n\log n)$），也可以直接做一遍，然后有 $Ans=\max\left(0,\left\lfloor\frac{\max\{l_u-r_u\}}{2}\right\rfloor\right)$。

Day1 T3 生成树（tree）

我们考虑 Matrix − tree 的生成函数情况——$x^i y^j$ 表示这个有 i 条绿边和 j 条红边的情况数。

二元函数插值，需要 n^2 个点值，于是需要进行 n^5 复杂度的高斯消元求行列式。

二元拉格朗日插值的复杂度是 $O(n^4)$ 的：

$$f(x,y)=\sum_{i,j\in[1,n]} val_{i,j}\cdot\prod_{k\neq i}\frac{x-k}{i-k}\cdot\prod_{k\neq j}\frac{y-k}{j-k}$$

Day2 T1 序列（seq）

我们从后往前贪心——选出当前序列中字典序最小的点（除了最左边的），然后找到一个在它左边的、奇偶性和它不同的、字典序最小的点。然后将它们删掉。

注意到这时，我们需要将它们之间的和它们两边的点都先删掉，一种很自然的想法是，这个问题被分成了三个互不相关的子问题，先递归下去，然后再归并方案。找点就用 RMQ 来找。但是这个归并，直接归并显然复杂度是错的，借助平衡树和启发式合并即可做到单 log n。

但是，有一个更加简洁得多的做法——我们不将它直接递归下去，而是像超级钢琴一样，把三个子问题丢进堆里，并通过 RMQ 来求出每个区间的答案。每次操作均从堆中取出一个区间，再拆成三个区间丢进去。复杂度是一个 $\log n$ 的。

Day2 T3 矩阵（matrix）

这是一个极其难以统计的量。既然不能直接统计，那我们就把所有限制条件转化成 DP 过程中的限制。

设 $f_{i,j}$ 表示，已经有 i 行 j 列，且这 i 行的 A 均已确定，并要求接下来的拓展中，不会再在这 j 列里放置任何棋子。

我们考虑新增一列，于是可以得到第一个转移：$f_{i,j} \cdot \left(\binom{i}{2} + i + 1\right) \to f_{i,j+1}$。

考虑新增一列，并用这一列来再新确定 k 行；令这 k 行都在第 $j+1$ 列上放置了棋子。那么第 $j+1$ 列的 (B,C) 就有 $\binom{i+k+2}{2}$ 种情况（必定小于等于这 k 个棋子，且有可能为原有 i 行中的两个。那么我们令这个 B 减小 1，C 增大 1，会发现刚好可以不重不漏地取到所有位置）。于是有第二个转移：$f_{i,j} \cdot \binom{i+k+2}{2} \to f_{i+k,j+1}$。

利用 NTT 优化转移即可做到 $O(nm\log_2 m)$。

Day3 T3 小 D 的远航（sailing）

依次考虑每个中线所在的列。由于凸对称性，每行只有最接近中线的两个障碍是有用的，且每个障碍给出的限制条件形如一个区间内全部否定。精细实现一下，即可 $O(n^2)$ 求出每个位置是否可达。然后广搜即可。