Problem 11~15

2021年9月26日　　21:31

#10342 [2020-03-04] 这套题（a）

对于这种 $[l_i,r_i]$ 类型的限制，我们首先给每个数都默认加上 l，然后容斥哪些 r 超标了。
记 $l=\sum l_i$，$r=\sum r_i$，$w(x)=[x\in T]$，根据插板法有：

$$Ans=\sum_{S\subseteq\{N\}}(-1)^{|S|}\cdot\sum_{s=L}^{R}w(s)\cdot\binom{s-\sum_{i\in S}l_i-\sum_{i\notin S}(r_i+1)+(n-1)}{n-1}$$

记 $T(S)=\sum_{i\in S}l_i+\sum_{i\notin S}r_i+1-(n-1)$，则有：

$$Ans=\sum_{S\subseteq\{N\}}(-1)^{|S|}\cdot\sum_{s=L}^{R}w(s)\cdot\binom{s-T(S)}{n-1}$$

可以看到，最重要的问题变为了计算这个组合数的和；由于有着两个不同的自变量，且 $n-1$ 很小，我们用范德蒙德卷积将其拆开：

$$Ans=\sum_{S\subseteq\{N\}}(-1)^{|S|}\cdot\sum_{s=L}^{R}w(s)\cdot\sum_{l=0}^{n-1}\binom{s}{l}\binom{-T(S)}{n-1-l}=\sum_{S\subseteq\{N\}}(-1)^{|S|}\cdot\sum_{l=0}^{n-1}\binom{-T(S)}{n-1-l}\sum_{s=L}^{R}w(s)\cdot\binom{s}{l}$$

这真的是对的吗？由于 $-T(S)$ 是负数，所以上面这个式子是错误的。但是我们如果给组合数拓域，拓展到 $\binom{-n}{m}$，$n,m>0$ 的情况，那么它就能成立。

关于负数组合数的性质，我们说两个：

1. $\binom{-n}{m}=\binom{n+m-1}{m}\cdot(-1)^m$，这个可以由 $A_n^k=n^{\underline{k}}$ 得到，也可以由阶乘的递推形式（$(-n)!=(-n)\times(-n-1)\times(-n-2)\cdots(-n-m+1)\times(-n-m)!\to\frac{(-n)!}{(-n-m)!}$）得到；还可以由杨辉三角而惊人地得到。
2. 拓展版的杨辉三角如下，可见它是满足递推式的。

1	-3	6	-10	15	-21	28
1	-2	3	-4	5	-6	7
1	-1	1	-1	1	-1	1
1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		

正因为它满足递推式，所以它满足二项式定理，于是就能得出范德蒙德卷积。

但是，枚举的上下界需要改一下，因为原本的式子中如果出现负数，就会使这项等于 0：

$$Ans = \sum_{S\subseteq\{N\}} (-1)^{|S|} \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \binom{-T(S)}{n-1-l} \sum_{s=\max(-T(S),0)}^{R} w(s)\cdot\binom{s}{l}$$

问题也就转化为了，如何快速求 $\sum_{i=0}^{R} w(s)\cdot\binom{s}{l}$

现在，设 $f_{i,j,k} = \sum_{p=0}^{d^j-1} w(p+d^jk)\cdot\binom{p+d^jk}{i}$ 我们再次将其用范德蒙德卷积拆开：

$$\begin{aligned}
f_{i,j+1,k} &= \sum_{p=0}^{d^{j+1}-1} w(p+d^{j+1}k)\cdot\binom{p+d^{j+1}k}{i} \\
&= w(k)\cdot\sum_{p=0}^{d^{j+1}-1} w(p)\cdot\sum_{l=0}^{i}\binom{p}{l}\binom{d^{j+1}k}{i-l} \\
&= w(k)\cdot\sum_{l=0}^{i}\binom{d^{j+1}k}{i-l}\sum_{p=0}^{d^{j+1}-1} w(p)\cdot\binom{p}{l} \\
&= w(k)\cdot\sum_{l=0}^{i}\binom{d^{j+1}k}{i-l}\sum_{p=0}^{d-1} f_{l,j,p}
\end{aligned}$$

直接前缀和优化，预处理部分复杂度可以接受。对于每个 R，我们再数位 DP 一遍，贡献为：

$$w(pre)\cdot\sum_{l=0}^{i}\binom{pre}{i-l}\sum_{p=0}^{now-1} f_{l,j,p}$$

其中，pre 为前面已经确定的位；now 是当前位。另外你可能由疑问——为什么要有 k 这一维？这是为了方便用范德蒙德卷积展开来；实际上是不用记下这一维的，这一维上直接枚举 k 就行了。