# My Wekry 7

Linshey

2023 年 6 月 28 日

# 目录

# 1 完成情况

| 题目编号 | 题目链接 | 完成进度 | done |
|---|---|---|---|
| 2 | CCO '23 P2 - Real Mountains | 听了做法 | |
| 3 | CCO '23 P3 - Line Town | 口胡 + 题解 | √ |
| 4 | 高维碎块 | 题解 | √ |
| 5 | [CTS2022] 普罗霍洛夫卡 | 通过 + 题解 | √ |
| 6 | 「JOISC 2020 Day1」建筑装饰 4 | 口胡 | √ |
| 7 | 「JOISC 2020 Day1」汉堡肉 | 看了题解 | |
| 8 | 「JOISC 2020 Day2」遗迹 | 题解 | √ |
| 9 | 「JOISC 2020 Day3」星座 3 | 题解 | √ |
| 10 | The Maximum Prefix | 题解 | √ |
| 11 | Weighted Increasing Subsequences | 题解 | √ |
| 12 | [AGC062D] Walk Around Neighborhood | 题解 | √ |
| 13 | P6072 『MdOI R1』Path | 口胡 + 题解 | √ |
| 14 | 海亮 Day1.B 计数 | 题解 | √ |
| 15 | 海亮 Day1.C 构造 | 题解 | √ |
| 16 | IOI 2023 国家队集训 @ 威海 Day 2 野餐 | 题解 | √ |
| 17 | IOI 2023 国家队集训 @ 威海 Day 2 外环路 2 | 题解 | √ |

# 2 解法记录

## 2.1 高维碎块

### 2.1.1 题意

给定高维立方体 $[p_1, p_2, \cdots, p_n]$，若一个点 $x_{1\sim n}$ 可以走到 $y_{1\sim n}$ 当且仅当 $\forall i, y_i \geq x_i$ 且 $\sum y_i - x_i = 1$，求这个 DAG 的最小链覆盖。

$n \leq 32$，$p \leq 10^9$，对质数取模。

### 2.1.2 题解

**定理 2.1.1.** 设 $M = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{2} \right\rfloor$，则最长反链 $I = \{\vec{x} \mid \sum_{i=1}^n \vec{x}_i = M\}$。

**证明.** 因为所有 $\sum x_i$ 相同的点互不可达，所以 $|I|$ 至少为其中最大的一组的点数；又因为可以归纳构造出那么多条不相交链，则可以说明答案的小于等于定理中的 $I$。 □

容斥后，题目转化为如下：

$$\text{Ans} = \sum_S \binom{M - s(S) - 1}{n-1} [M - s(S) \geq n]$$

考虑折半：

$$\begin{aligned}
\text{Ans} &= \sum_{S_0, S_1} \binom{M - s(S_0) - s(S_1) - 1}{n-1} [M - s(S_0) - s(S_1) \geq n] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{S_0} \binom{M - s(S_0) - 1}{i} \sum_{S_0, S_1} \binom{-s(S_1)}{n-1-i} [M - s(S_0) - s(S_1) \geq n]
\end{aligned}$$

排序并双指针即可。**最长反链的题目，经常是需要你手动将点分层，然后证明其中一层，它恰好就是你的最长反链。**

## 2.2 [CTS2022] 普罗霍洛夫卡

首先将问题转化为：维护一个 $a_{1\sim n}$ 数组，每次操作将一个区间 $+1$，查询区间历史异或和。这个转化是相当大胆的，但是这能做下去的原因在于：保证 $a_{1\sim n}$ 不增，并且 $a_i - a_{i+1} \le 1$，这带来了相当多的额外性质，且待接下来使用。

历史异或和，不妨在每个 $a_i$ 发生改变时，**把旧的 $a_i$ 贡献到一个表示古早版本（非当前版本）历史异或和的数组 $H_i$ 上，再单独维护维护当前的 $a_i$ 对当前历史异或和的贡献**。这个分开考虑的合理性来源于，$a_i$ 的古早版本的历史异或和，它已经固定了；而 $a_i$ 的当前版本，随着时间的延申，对于当前的历史异或和的贡献是不同的，**这两者有本质差异**。

注意到 $a_i$ 当前版本延申了奇数次和偶数次**必须**分开来维护，我们维护 $f_i, g_i$ 表示，在奇数/偶数时刻产生的 $a_i$ 的异或和，再额外把 $H_i$ 考虑进去，得到 $f_i, g_i$ 的定义（记 $t_i$ 表示 $a_i$ 的产生时刻）：

**定义 2.2.1.**

$$f_i = H_i \oplus (a_i \cdot [t_i \bmod 2 = 0])$$
$$g_i = H_i \oplus (a_i \cdot [t_i \bmod 2 = 1])$$

考虑一次修改的影响，化简后即为：$a_i \leftarrow a_i+1$，以及 $f_i \leftarrow f_i \oplus a_i \oplus (a_i+1)$ 或者 $g_i \leftarrow g_i \oplus a_i \oplus (a_i+1)$。**这意味着，不论 $t_i \bmod 2 = 0/1$，它对于 $f_i/g_i$ 有着相同的贡献形式！** $f_i$ 的定义中包括了 $H_i$ 的用意就在于此。

注意到 $DeltaF_i = a_i \oplus (a_i+1) = 2^{\text{lowbit}(a_i+1)+1} - 1$，这个形式结合上 $a_i - a_{i+1} \le 1$，使得贡献 $2^j$ 的数小于等于 $\frac{n}{2^j}$ 种，这个贡献的形式比较好。

设 $B = 7$，我们每 $2^B$ 个数分一块，**那么同一个块中最多只有一种 $a_i$ 使得 $DeltaF_i > 2^B$！** 我们每次快速找到这种数，就可以处理 $> 2^B$ 的部分的异或和。我们要考虑的是怎样快速计算 $< 2^B$ 的位对于整块 $f/g$ 异或和的贡献以及如何快速下传给每一个 $f_i, g_i$。

考虑一个块不断整体加一，整体加一第 $k$ 次，在 $2^i$ 位上的贡献有一个关于 $k$ 的**循环节** $2^i$！我们直接处理一个数组 $h_{i,k\in[0,2^i)}$ 表示每个 $k$ 在 $2^i$ 位上的贡献，进一步 $O(B)$ 算出 $g_{k\in[0,2^B)}$ 表示每一个时刻，它对于 $f/g$ 的异或和的贡献。于是就能 $O\left(2^B\right)$ pushup 使得接下来可以 $O(1)$ 整体加一；标记下传是这个过程的逆过程，无需赘述。

多么美好的题目！它无比巧妙地使用了子区间种类数异或和带来的漂亮的性质，完成了这样一个挺震撼的事情。究竟 lxl 是从做到哪一步时，才开始相信这样一个题目可做的呢？

## 2.3 The Maximum Prefix

这个 $h_{0\sim n}$，相当让人想要把 $f_{i,j}$ 表示前 $i$ 个数，最大前缀和为 $j$ 的概率求出来，从而使得对于 $h_i$ 的贡献可以分别计算。但是很可惜，这办不到 $O(n^2)$。

我们考虑弱于如上做法的处理方式，设 $f_{i,tar,0/1}$ 表示前 $i$ 个数、离目标前缀和最大值还有 $tar$ 的差距、是否达到过最大值的期望贡献和。**这个方式相当于是把不同的 $h$ 放进了同一个 dp 数组里一起转移。**

## 2.4 Weighted Increasing Subsequences

考虑每个数 $a_x$ 的贡献。$a_x$ **没有贡献的充要条件是：设 $z$ 为 $\max\{i|a_i \geq a_x\}$，上升子序列的末尾是** $z$。所以我们只要求 $x \to z$ 的上升子序列个数。枚举 $z$，发现有用的 $x$ 的总和是 $O(n)$ 的。

感觉主要差在了没有看出这个子序列没有贡献只能是恰好以 $z$ 结尾。

## 2.5 「JOISC 2020 Day3」星座 3

### 2.5.1 法一

dp：笛卡尔树上的一个区间 $[l,r]$，区间上空最多有一个星星，枚举这个星星的横坐标 $x\in[l,r]$，求出 $g_x$ 表示如果 $x$ 上空保留了一个星星，那么区间 $[l,r]$ 的最小开销，以及 $f[l,r]$ 表示上空没有星星时的最小的代价。

因为已经保留了 $x$，那么 $x_{star}\in[l,r]$ 且 $y_{star}>\max[l,r]$ 的星星肯定都不能要了，直接从 $x$ 对应的那个儿子的 $g_x$ 加上其他儿子 $f_x$ 转移来。启发式合并即可。

### 2.5.2 法二

直接考虑 dp $f[l,r]$。**建出笛卡尔树的具体形态，选择了一个 $x$ 相当于 $[l,r]$ 到 $[x,x]$ 这一条链上都不能选星星**，但是这个链上的点的儿子的子树可以选，可以用树剖维护链求和。

### 2.5.3 法三

按照 $y_{star}$ 从**小到大**去考虑每一个星星，设 $pl_{star}$ 表示 $star$ 左侧第一个高于它的高楼的坐标，$pr$ 同理。那么，你要选择这颗星星，相当于要求这之后（**因为从小到大，所以只要考虑纵坐标上方的**），$[pl,pr]$ 之内都不能再有任何一个星星。

如果选择了一个星星 $x$，那么它下方所有 $x\in[pl_{star},pr_{star}]$ 的 $star$ 都必须花费 $cost_{star}$，记 $f_x$ 表示这个选择 $x$ 带来的花销。比较 $cost_x$ 与 $f_x$。

若 $f_x<cost_x$，那么 $\text{Ans}\leftarrow\text{Ans}+f_x$，并且令 $\forall i\in[pl_x,pr_x],f_i\leftarrow f_i+cost_x-f_x$。

否则，$\text{Ans}\leftarrow\text{Ans}+cost_x$。本质上其实是一个带悔贪心。

## 2.6 「JOISC 2020 Day2」遗迹

先考虑给定 $h_{1\sim 2n}$，怎么判断保留下来的是哪些元素。

**定理 2.6.1** (判定方式一)**.** *维护一个集合 $S$，对于 $i=n\sim 1$，先向 $S$ 中插入 $h_x=i$ 和 $h_y=i$ 的 $x,y$，然后取出 $S$ 中的最大值 $mx$，那么 $mx$ 最后会被保留下来，并且最终的高度为 $i$。*

但是这个判定方式非常不利于计数，这时就**显式地使用需要许多日本计数题的精髓：转化判定方式，使得可以计数**。这题中，我们尝试从右向左去考虑。

**定理 2.6.2** (判定方式二)**.** *维护一个 $vis_x$ 数组，表示最终高度为 $x$ 的位置是否已经被确定。对于 $i=2n\sim 1$，判断 $vis_{h_i}$，如果已经被占用，那么令 $h_i\leftarrow h_i-1$，继续判断；若 $h_i=0$，那么表示第 $i$ 个柱子最后被夷平了。*

这个判定方式就好多了，我们考虑它的 dp 状态需要维护什么：

1. $vis_x$ 数组：注意到我们只要确定它的最长的等于 1 的前缀的长度 $j$，剩下的可以**延迟确定**。

2. 哪些数使用了 $0,1,2$ 次：注意到，根据 $1\sim i$ 中被夷平的柱子的数量，可以唯一确定长度为 $j$ 的 $vis_x=1$ 的前缀里，有多少个 $x$ 使用了 2 次，剩下多少个用了一次；对于延迟确定的部分，可以接着延迟确定。

转移时，枚举这个前缀会延长到多长，系数可以推导和预处理。

## 2.7 [AGC062D] Walk Around Neighborhood

首先曼哈顿距离转为切比雪夫距离，会容易思考非常多。

从小到大枚举一个 $d$，判断能否全部在 $[-2d,2d]^2$ 这个矩形中；根据 $d$ 的最小性，所以肯定有经过其边界，**考虑 meet in the middle，把全部东西分成两个集合，它们分别能到达边界上**。

**定理 2.7.1.** 若能到达矩形 $[-2r,2r]^2$ 的边界上，则一定可以到达边上的任意一点。

这保证了 meet in the middle 时不需要考虑它具体在哪个点会和，并且使我们集中精力于讨论哪些 $r$ 是合法的。

**定理 2.7.2** ($r$ 合法的充要条件). $r$ 合法当且仅当 $\sum[d_i \le r]d_i \ge r$ 或者 $\sum[d_i \le r]d_i \ge \min\{d_i|d_i > r\} - r$。

那么肯定是把大于 $r$ 的最小的两个数分别分进两个集合里，从小到大枚举 $r$，已经小于 $r$ 的元素的部分和用 bitset 优化背包去快速维护。

## 2.8 P6072 『MdOI R1』Path

首先，设 $dep_u$ 表示 $u$ 到根路径的异或和，我们实际上就是要求 $in_u/out_u$ 表示子树内/外的 $dep_u \oplus dep_v$ 的最大值。$in_u$ 可以用启发式合并完成，$out_u$ 发现不太能启发式合并，怎么办？

我们找到全局最大的 $dep_u \oplus dep_v$，那么只有两条链上的最大值不等于它们两个的异或，那么直接对两条链做就行了。

## 2.9 海亮 Day1.B 计数

### 2.9.1 题意

对于一个合法括号串，定义一个右括号的权值为其左侧（不包括自身）的左括号个数减去右括号个数，一个合法括号串的权值为所有右括号权值的积，求所有合法括号串权值和。

### 2.9.2 题解

这个先下降，再乘上下降前的值，这像极了求导。首先写出答案的生成函数形式：

$$F_i = xF_{i-1} + F'_{i-1}$$

设 $G_i = F_i \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$，那么：

$$\begin{aligned}G_i &= \left(xF_{i-1} + F'_{i-1}\right) e^{\frac{x^2}{2}} \\ &= G'_{i-1}\end{aligned}$$

我们要求的就是 $G_0^{(2n)}[x^0]$，而 $G^{(n)}[x^i] = G^{(n-1)}[x^{i+1}](i+1)$，归纳可以得到答案。

## 2.10 海亮 Day1.C 构造

### 2.10.1 题意

将 $2, 3, \cdots, 3n+1$ 划分成 $n$ 个钝角三角形。

### 2.10.2 题解

首先这个钝角三角形的**条件很弱，我们找一个更严格但更简单的条件：发现** $x, y, x+y-1$ **构成钝角三角形**。

那么我们用 $(2, x, x+1), (4, x-1, x+2), (6, x-2, x+3), \cdots$ 可以搞定所有偶数；奇数是类似的。

## 2.11 CCO '23 P3 - Line Town

**定理 2.11.1.** 设第 $i$ 个数最后位于 $p_i$，那么它最后的值就是 $h_i \cdot (-1)^{|i-p_i|}$。

所以我们**转而考虑这个排列** $p$，最小化 $\mathrm{Inv}(p)$。

考虑按照**绝对值从大到小考虑每一种绝对值**，设绝对值最大为 $x$，取出所有绝对值等于 $x$ 的位置，那么有三种数：$+x, -x, \neq x$，那么我们不妨把 $\neq x$

的数都视为 0，目标变为将序列转化为 $-x,-x,\cdots,-x,0,\cdots,0,+x,\cdots,+x$，然后递归进值域缩小的问题里。

易见：这个递归唯一有后效性的变量是：**已经确定的前缀长度的奇偶性**。所以我们只需要记下这个奇偶性，然后就完全**规约为了只有 $-1,0,1$ 的问题**。

首先考虑怎么把 0 去掉：注意到一个 1，它如果最后是 $-1$，那么代价为它左侧的 0 的个数；如果最后是 1，那么代价为它右侧的 0 的个数，其正确性来源于它要么最后是极左的要么是极右的，那么它一定会和这些 0 指向的 $p$ 构成逆序对。

观察到：**非 0 位置可以分为两种**，第一类数是“等于 $-1$ 当且仅当它最后位于奇数位置”，第二类数是“等于 $-1$ 当且仅当它最后位于偶数位置”。**将这两种数提出来，分别排序**。

我们枚举全 $-1$ 的前缀长度（间接枚举了全 1 后缀的长度），对于前缀里的奇数位置，我们要取第一类数的一个前缀；对于前缀里的偶数位置，我们要取第二类数的一个前缀；对于后缀里的奇数位置，我们要取第二类数的一个后缀；对于后缀里的偶数位置，我们要取第一类数的一个后缀。我们在枚举长度的时候，动态维护它能不能刚好用完所有非 0 位置，以及当前的排列的逆序对数。

## 2.12 IOI 2023 国家队集训 @ 威海 Day 2 野餐

### 2.12.1 题意

有一个循环排列 $p_{0\sim n-1}$，进行如下三轮游戏：

- $n$ 个策略相同的骑士，分别坐在 $p_{0\sim n-1}$ 前，坐在 $p_i$ 前的骑士只能知道 $p_i,p_{(i+1)\bmod n}$ 的值；每个骑士要写下一个值 $b_i\in[1,10^9]$。
- $n$ 个策略相同的骑士，分别坐在 $b_{0\sim n-1}$ 前，坐在 $p_i$ 前的骑士只能知道 $b_i,b_{(i+1)\bmod n},b_{(i-1)\bmod n}$ 的值；每个骑士要写下一个值 $c_i\in[0,10^9)$。

- $n$ 个策略相同的骑士，分别坐在 $c_{0\sim n-1}$ 前，坐在 $p_i$ 前的骑士只能知道 $c_i, c_{(i+1) \bmod n}, c_{(i-1) \bmod n}$ 的值；每个骑士要写下一个值 $d_i \in [0,3)$。

注意，每个骑士不知道 $n$ 的具体值，你需要给每个骑士设计一个固定的策略，使得 $\forall i, d_i \neq d_{(i+1) \bmod n}$。$n \leq 10^5$。

### 2.12.2 题解

由于不知道 $n$ 的具体值，所以**一个骑士知道的信息非常地片面，所以我们不妨以一个非常局部的性质作为条件和目标，逐渐递归**。考虑完成这样一件事情：$p, b, c, d$ 都需要满足 $x_i \neq x_{(i+1) \bmod}$，要在满足此条件的前提下逐渐缩小其值域。

考虑我们求出一个函数 $u \neq v, v \neq w \Rightarrow f(u,v) \neq f(v,w)$。

**定义 2.12.1** ($f$ 的构造一)**.** **设** $u, v$ **二进制下第一个不相同的位为** $2^i$**,**$f(u,v) = 2i + u_i$。这个 $f$ 能做到从 $2^T$ 映射到 $2T$。

**定义 2.12.2** ($f$ 的构造二)**.** 可以先把 $u, v$ 映射至一个 $T$ 个 0 与 $T$ 个 1 的整数，然后再求上面的 $f$。这个 $f$ 能做到从 $\binom{2T}{T}$ 映射到 $2T$。

令 $B(x,r) = f(x,r,10)$,$C(l,x,r) = f(f(l,x,3), f(l,x,3), 2)$ 就可以在两轮内把值域缩小到 $[0,3]$。考虑最后一轮 $D(l,x,r)$，若 $x \leq 2$，$D(x,l,r) = x$；否则，$l, r \leq 2$，于是 $l, r$ 两个数一定不会变，那么 $x$ 就是 $[0,2]$ 中不与 $l, r$ 相撞的一个数。

## 2.13 IOI 2023 国家队集训 @ 威海 Day 2 外环路 2

### 2.13.1 题意

有一棵树，保证点的标号为一个以 1 开始的 dfs 序，将所有叶子节点按照编号排序，前后两两相接串成环，形成了一个外环内树的平面图。你要截断尽可能少的边，使得这个图不存在简单奇环。$N \leq 10^5$。

### 2.13.2 题解

注意到一个奇环，一定是一个非树边加上偶数个树边，也就是说，如果将树上所有点黑白染色，非树边的两个端点的颜色一定不能相同。

转化问题为：给每个点染上一个颜色，最小化两端点颜色相同的边的个数。树形 dp 即可。