

## 【清华集训 2014】玛里苟斯

### 【题目描述】

<https://uoj.ac/problem/36>。

$S$  是一个可重集合,  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。

等概率随机取  $S$  的一个子集  $A$ 。

计算出  $A$  中所有元素异或和  $x$ , 求  $x^k$  的期望。

$n \leq 10^5, k \leq 5$ , 保证答案小于  $2^63$ , 要求输出精确小数答案。

### 【题解】

一种脑子有问题的方法是: 把  $x^k$  拆开来:

$$\begin{aligned} x^k &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} \prod_{j=1}^k (x \text{ and } 2^{i_j}) \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} 2^{\sum_{j=1}^k i_j} \prod_{j=1}^k [x \text{ and } 2^{i_j} \neq 0] \end{aligned}$$

枚举了  $i$  后, 问题就变成了求这些位上都等于 1 的概率, 也就可以把所有的数只保留  $i$  中的位。对于所有相同的数, 显然只要保留一个! 因为恰好有一半的情况里它的贡献是 1!

根据答案小于  $2^63$ , 可以算出复杂度是  $O\left(\min(n, \frac{63}{k}) \cdot \binom{63+k-1}{k}\right)$ , 通过精湛的卡常可以通过。

事实上, 子集异或的事情只要不是集合幂级数数学傻了, 就应该意识到每个在其线性基内的数的出现次数都等于 2 的自由元个数次方! 对于  $k \geq 3$  采取暴力遍历线性基即可。

### 【提交记录】

<https://uoj.ac/submission/590211>。

## 【清华集训 2014】主旋律

### 【题目描述】

<https://uoj.ac/problem/37>。

给定一张有向图, 求其强连通生成子图个数。  $n \leq 15$ 。

**【题解】**

强连通的条件是，缩点后，不存在一个 0 入度的非全集的强连通分量，也就是这个强连通分量入度为 0 的集合是空集。

我们直接容斥这个入度为 0 的集合，记  $f_S$  表示  $S$  导出子图有多少个生成子图强连通， $g_S$  表示把  $S$  拆分成  $T_1, T_2, \dots, T_k$  的  $(-1)^k \cdot \prod f_{T_i}$  的和，然后就能自然转移。

求两个集合之间的边数，可以利用 bitmask 做到总复杂度  $O(3^n \cdot n)$ 。

**【提交记录】**

<https://uoj.ac/submission/590164>。

**【清华集训 2014】虫逢****【题目描述】**

<https://uoj.ac/problem/45>。

给定一个基因集合（大小为  $M$ ）， $N$  个生物，每个生物都有  $L$  基因（保证数据随机选取）。然后每个生物都分裂成了两个生物，一个保留原有基因，一个有恰好一半的基因被随机替换为了它本来没有的基因。现在把这  $2N$  个生物打乱告诉你，你要帮忙两两配对。 $N = M = L^2 \in [400, 16900]$ 。

**【题解】**

本题读题难度非常大，由于数据完全随机且  $L$  集合相当大，可以视为两两配对是确定的，不存在一个一般图最大匹配的问题！

暴力 check 肯定是要 TLE 的，那这时的思路肯定是用一些 Hash 之类的信息来先划分等价类，然后只 check 等价类之内的信息，以减少 check 次数。

我们给基因库随机一个排列，令每个生物的值为其基因里最靠前的一个，那么同源的两个生物值相等的概率是  $\frac{1}{3}$ ，不同源的值相同的概率是  $\frac{1}{L}$ 。这还不够，再给它加上双哈希，冲撞率进一步降低，每次可以将  $N$  降低  $\frac{1}{9}$ 。可以通过。

**【提交记录】**

<https://uoj.ac/submission/590159>。

## 【CF1225G】To Make 1

### 【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1225G>。

合并  $n(n \leq 16)$  个整数为 1 个，合并  $x$  和  $y$  时将会删除  $x$  和  $y$  然后加入一个整数  $f(x+y)$ ，其中

$$f(x) = \begin{cases} f\left(\frac{x}{k}\right), k|x \\ x, \text{otherwise} \end{cases}$$

如果最后留下的数字可以为 1，输出 YES 并输出方案（每次是哪两个数字合并）。否则输出 NO。保证  $k \nmid a_i$  且  $\sum a_i \leq 2000$ 。

### 【题解】

事实上，我们就是要寻找一组  $b_{1 \sim n}$ ，使得  $\sum a_i \cdot k^{-b_i} = 1$ 。

证明（充分）：对于每种合法方案，可以还原出一组系数  $b$ 。

证明（必要）：从  $b$  中可以递归地还原出方案，因为  $k \nmid a_i$ ，而根据  $k^{\max b} = \sum_{i=1}^n a_i^{\max b - b_i}$ ， $b_i = \max b_i$  的数不可能只有一个，否则等式两边模  $k$  的值一定不同！所以可以合并这两个，然后递归下去构造。

如果改成选  $k$  个数，合并成和除  $k$  的话，那其实就再加上一个限制条件  $\sum k^{-b_i} = 1$ 。

那剩下的 dp 其实就相当简单了，设  $f_{S,i}$  表示合并了集合  $S$  和为  $i$  是否可以，一种是  $f_S$  向  $f_{S \cup u}$  转移，一种是  $f_S$  内部全部尽可能除以  $k$  的转移。用 bitset 优化即可，输出方案就按照上面证明的那样去递归构造。

复杂度  $O\left(\frac{n \cdot 2^n \cdot \sum a}{w} + 2^n \cdot \sum a\right)$ 。

### 【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/92669335>。

## 【CF1149D】Abandoning Roads

### 【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1149D>。

一张  $n$  个点  $m$  条边的无向图，只有  $a, b$  两种边权 ( $a < b$ )，对于每个  $i$ ，求图中所有的最小生成树中，从 1 到  $i$  距离的最小值。 $n \leq 70, m \leq 200$ 。

**【题解】**

只保留  $a$  的边，可以先求出连通块和连通块内部的全源最短路，然后再考虑上  $b$  的边去找 1 到  $i$  的最短路，但是要加上一个限制——不同两次进入同一个连通块。

我的解决方案是 A\*，拿下最优解。

更为靠谱的方案是，会重复经过的连通块，至少有 4 个点，所以只状压这些连通块，复杂度  $2^4$  左右。

**【提交记录】**

<https://www.luogu.com.cn/record/92653970>。

**【CF1149E】 Election Promises****【题目描述】**

<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1149E>。

在 Byteland，两个党派——WA 党和 TLE 党，他们都在不停地承诺降税。

Byteland 有  $n$  个城市， $m$  条单行道，并且不能从一个城市出发又回到这个城市。竞选开始前，第  $i$  个城市的税收是非负整数  $h_i$ 。

一次拉票的过程：这个党派会来到一个城市  $x$ ，承诺会将这个城市的税收 \*\*降低\*\* 为一个非负整数。同时，这个党派可以将从  $x$  走一条单行道可以直达的城市的税收做任意更改，变高变低都行，但还得保证该城市的税收是非负整数。

两党交替拉票，无法执行一次拉票的党派会输。问胜负。

**【题解】**

求出原图上每个点的 SG 值，如果对于每个  $x$ ，都有  $\bigoplus_{u=1}^n [SG_u = x]h_u = 0$ ，那么先手必败；否则先手必胜。

证明就相当容易了，找到最大的异或和不为 0 的  $x$ ，它一定能把所有的  $x$  都一并改成 0。

**【提交记录】**

<https://www.luogu.com.cn/record/92602582>。

## 【CF1698G】Long Binary String

### 【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1698G>。

现有一个无穷大的 01 序列，初始全为 0。给定一个有限的 01 序列  $S$ ，每次操作可以将原序列一个长为  $|S|$  的子段异或上  $S$ ，最终需要使得整个序列只有两个 1。

问最终字典序最大的序列的两个 1 分别所处的位置。 $|S| \leq 35$ 。

### 【题解】

左边那个 1 显然是  $\text{lowbit}(S)$ ，在此之后显然可以把  $S$  的低位的 0 全部去掉。

显然一个位置只会被异或上最多一次，把每个位置是否要异或记录下来为  $F$  数组，那实际上我们就可以把这个过程看作是一个生成函数的乘法！也就是求最小的  $k$  使得：

$$x^k + 1 = S(x) \cdot F(x)$$

不妨视作：

$$x^k = 1 \pmod{S}$$

BSGS 即可！

### 【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/92599215>。

## 【CF1257G】Divisor Set

### 【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1257G>。

给一个数  $m$  的质因子分解  $m = \prod_{i=1}^n p_i$ ，找出一个最大的集合  $S$  满足  $\forall x \in S, x \mid m$  且  $\forall x, y \in S, x \nmid y (x \neq y)$ 。

输出  $|S| \bmod 998244353$ 。

### 【题解】

当每个素数两两不同的时候，显然是取  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  个最优。

猜想：一般情况下仍然是取  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  个最优，再去重。  
为了计算这种策略方案数，可以用一个分治 NTT 来计算。

### 【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/92546117>。

## 【ZJOI2015】地震后的幻想乡

### 【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/P3343>。

一张无向图，每条边的权值在  $[0, 1]$  之间随机，求最小生成树的最大边的大小的期望。 $n \leq 10$ 。

### 【题解】

设  $P(x)$  为最大边小于等于  $x$  的概率，那么答案就是  $1 - \int P(x) dx$ 。

显然  $P(x)$  是一个关于  $x^i \cdot (1-x)^{m-i}$  的多项式，系数为  $i$  条边能使得图连通的方案数。

那么跑一个集合幂级数 ln 形状的 dp 就行了！

### 【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/92375444>（次优解）。