「2021 集训队互测」Lovely Dogs

【题目描述】

https://loj.ac/p/3632。

有 n 只可爱的狗子，第 i 只可爱的狗子的可爱值为 a_i。可爱的狗子们通过一些姐妹关系形成了一个树状结构。在 1 号狗子是树的根的情况下，i 号狗子的子树内的狗子就是 i 号狗子的妹妹们。

若一只可爱的狗子 i 在玩游戏，那么她会对游戏产生 $f_d(a_i^2)$ 的欢乐值。若两只可爱的狗子 i,j 在一起玩游戏，那么她们会对游戏产生 $f_d(a_ia_j)$ 的欢乐值。一次游戏的欢乐值是所有玩游戏的狗子和狗子对，所贡献的欢乐值的和。

给定常数 d。我们将 z 拆解成一些质数的幂次的乘积 $z=\prod_i p_i^{k_i}$，我们定义：

$$f_d(z)=\prod_i(-1)^{k_i}[k_i\le d]$$

现在对于每只可爱的狗子 x，她打算和她的妹妹们一起玩游戏，希望你能帮她们计算出此次游戏的欢乐值。$n\le 2\times 10^5$。

【题解】

蔡欣然美丽且智慧！注意到 $f_d(z)$ 可以拆开来：

$$f_d(z)=\prod_i[k_i\le d]\prod_i(-1)^{k_i}$$

而后半部分是一个完全积性函数，设它为 g，那么 $\sum_{i,j}g(a_i\cdot a_j)=(\sum a_i)^2$，可以直接统计；而第一部分的那个条件限制才是最难考虑的。

考察前半部分的 Bell 级数，它是一个 $1,1,1,1,1,1,0,0,0,\cdots$ 的形式，我们自然地将其卷上 μ；或者换个方向思考，设 x 是最大的 x^{d+1} 整除 z 的数，那么 $x=1$，即 $\sum_{t|x}\mu(t)$！于是得到：

$$\begin{aligned}\sum_j f_d(a_i\cdot a_j)&=g(a_i)\cdot\sum_t\mu(t)\sum_j\left[t^{d+1}|a_i\cdot a_j\right]g(a_j)\\&=g(a_i)\cdot\sum_t\mu(t)\sum_j\left[\frac{t^{d+1}}{\gcd(t^{d+1},a_i)}|a_j\right]g(a_j)\\&=f_d(a_i)\cdot\sum_{t|a_i}\mu(t)\sum_j\left[\frac{t^{d+1}}{\gcd(t^{d+1},a_i)}|a_j\right]f_d(a_j)\end{aligned}$$

注意到 t 只要枚举到 a_i 的因数，否则的话 a_j 里肯定有一个 $d+1$ 次的质因子，就可以用 f_d 来判掉。在此基础上，用 dsu on tree 就可以轻松做到 $o(n\log^2 n)$ 的总复杂度。

【提交记录】

https://loj.ac/s/1612145。

「ICPC World Finals 2018」征服世界

【题目描述】

https://loj.ac/p/6405。

你有一张世界地图，并且知道各国家之间所有可用的交通路线。每条路线连接两个国家，并且有一个固定的费用，每一个军队沿该路线移动都需要一个单位的费用。你知道目前你的所有军队所在的位置，以及在每个国家至少需要放置多少军队来征服它。你至少需要花多少钱移动你的军队来征服世界？

$1 \le n \le 250000$，保证总军队数（x_i 的和）不小于 y_i 的和，且不大于 10^6。

【题解】

这个看着就一股费用流的感觉，当然应该往模拟费用流的方面去考虑。考虑记盈余军队的为 +，需要增援的为 -，那么我们就是要 +- 匹配，且 - 全都要匹配，且总权值和最小。

若一个 + 和一个 - 的匹配了，那么我们要有两个反悔点，一个是假的 +，把这个 - 的匹配走；一个是假的 -，把这个 + 的匹配走，全都放在 lca 处即可。

实现上可以从下到上启发式合并，每个点维护两个堆，每当两个堆的堆顶的和小于等于 0，就取出两个堆顶进行合并，并产生两个新的虚点。

为了保证每个 - 的都必选，我们给每个 - 都先添上 $-\infty$ 的权值，最后再加上我们减去的权值即可。$O(n\log^2 n)$。

【提交记录】

https://loj.ac/s/1614253。

「ICPC World Finals 2018」绿宝石之岛 & 「2020-2021 集训队作业」Gem Island 2

【题目描述】

https://loj.ac/p/6406。

有 n 个人，每个人手上有一颗宝石，d 个晚上，每个晚上会有随机一颗宝石分裂成两个宝石。问最后一晚之后，拥有宝石数量最多 r 个人的宝石数量的和。

ICPC 中，$n,d \le 500$，要求输出 10^{-6} 级别精度；集训队作业中，$n,d \le 1.5\times 10^7$，要求对 998244353 取模。

【题解】

考虑 Min-Max 反演，就变成了问 i 个人的集合里问最小值的期望 f_i。直接枚举最小值是 j，然后将贡献差分一下，然后就只要写出“概率”，用 EGF 可以很硬核地直接写出来：

$$\begin{aligned} f(i) &= \frac{d!}{n^d}\sum_{j=0}[x^d]\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-i}\cdot\left(\frac{x^j}{1-x}\right)^i \\ &= \frac{d!}{n^d}\sum_{j=0}\binom{n+d-ij-1}{d-ij-1} \end{aligned}$$

注意到组合数内的变量只有 ij，可以通过快速迪利克雷后缀和得到。然后考察 Min-Max 容斥的系数：

$$= \sum_{i=1}^{n} f(i)\cdot\binom{n}{i}\cdot\left(\sum_{j=1}\min(r,i)(-1)^{i-j}\binom{i-1}{j-1}\right)$$

注意到前半部分都好求，括号里的东西，可以递推地求出！$O(n\log\log n)$。对于 ICPC 版本，可以用手写高精度浮点数和先乘后除来完成。

【提交记录】

https://loj.ac/s/1614641 & https://loj.ac/s/1614696。

【清华集训 2014】矩阵变换

【题目描述】

https://uoj.ac/problem/41。

给出一个 N 行 M 列的矩阵 A，保证满足以下性质：

- $M > N$
- 矩阵中每个数都是 $[0,N]$ 中的自然数。
- 每行中，$[1,N]$ 中每个自然数都恰好出现一次。这意味着每行中 0 恰好出现 $M\sim N$ 次。
- 每列中，$[1,N]$ 中每个自然数至多出现一次。

现在我们要在每行中选取一个非零数，并把这个数之后的数赋值为这个数。我们希望保持上面的性质 4。

【题解】

由于最后一列的限制，所以每行选出的数两两不同！我们不妨视作是从数到行的完美匹配。

继续考察限制 4，就发现等同于不存在如下这样两行：

22222222222222 2 333333

这就是一个稳定婚姻系统！因为记每个数字为女生，行为男生，女生对男生的好感度是这个数字在这行出现的位置，越靠左越好；男生对女生的好感度也类似，但是越靠右越好，于是上面的两行其实就等价于一对不稳定情侣。$O(NM)$。

【提交记录】

https://uoj.ac/submission/589678。

【UR 13】Ernd

【题目描述】

https://uoj.ac/problem/187。

有一个掉落式音游，接水果的盘子长度为 1，每秒只能左移一步或者右移一步或者不动；在某些递增的时刻里会有水果掉下来，总分是每段连击长度的平方的和。水果个数 5×10^5。

【题解】

显然根据能不能连击，我们能把水果序列划分成若干段可以连击的段，段内的转移就是一个标准的斜率优化的形式。

而段间的转移则是一个二维偏序的形式，注意到点 (x_i, y_i) 能转移的区间是它上方 45° 和 135° 这个区间，我们只要把平面斜过来看就变成一个标准的矩形的二维偏序了。即 $(x', y') = (y' - x', y' + x')$，然后每个数向偏序它的点转移，直接扫横坐标维护一个纵坐标的树状数组即可。$O(n\log^2 n)$。

【提交记录】

https://uoj.ac/submission/589395。

【AGC032D】Rotation Sort

【题目描述】

https://atcoder.jp/contests/agc032/tasks/agc032_d。

给定一个排列 p，每次你可以进行如下两种操作：

1. 花费 A 的代价，选择某个区间 $[l, r]$，把它向左循环移位。
2. 花费 B 的代价，选择某个区间 $[l, r]$，把它向右循环移位。

问将其排序的最小代价。$n \leq 5000$。

【题解】

一个很关键的想法是将其看作是插入排序。显然至少存在某个位置 mid，不变，不妨枚举 mid，mid 左侧的 $> mid$ 的数必然要右移，mid 右侧的 $< mid$ 的数必然要左移，那这些数就是自由的，我们只要递归下去处理 mid 左侧的 $< mid$ 和 mid 右侧的 $> mid$ 的数就行了。这就得到了一个 $O(n^5)$ 的做法。

如上做法其实能启发我们直接枚举所有的不变的点（构成一个上升子序列），对于固定的点 x, y 之间的数，若 $< x$，贡献为 B，若 $> y$ 贡献为 A，若在 $[x, y]$ 中，则它也可以不动，不妨设它会花费 B，那么每个数的贡献就只取决于和 y 的大小关系了，也就可以 $O(n^2)$ 完成这个 dp 了。

【提交记录】

https://atcoder.jp/contests/agc032/submissions/35958089。

【AGC015D】A or...or B Problem

【题目描述】

https://atcoder.jp/contests/agc015/tasks/agc015_d。

用 A 到 B 间的数，能用按位或表出多少个数？$A, B < 2^{60}$。

【题解】

我们枚举一个数 x，check 它能否被表出。显然 x 中等于 0 的位已经固定了，这些位上的数一定得是 0，也就是我们只能用 $[l, r]$ 内，这些位上都是 0 的数，记这个集合为 S；这些数显然全用上最优。

对于其它的位 z，都要存在一个数 $\in S$，其第 z 位为 1。我们求出大于等于 A 的、该是 0 的位上全是 0 的、第 z 位上为 1 的最小数为 y，那么 y 一定要 $\leq B$。

我们求出大于等于 A 的、该是 0 的位上全是 0 的、不要求第 z 位上为 1 的最小数，然后把第 z 位改为 1，z 后面的数全清空（如果上一步操作没有改变的话不进行此操作），就得出了 y；那显然最劣的是最高的没有填 1 的自由位记为 z。

我们从低到高，dp of dp 地做，记下之前是从哪一位开始大于/等于/无法大于，以及最高的没有填 1 的自由位的位置，然后就能 dp 转移了。$O(60^3)$。

【提交记录】

https://atcoder.jp/contests/agc015/submissions/35976355。

【AGC004D】Teleporter

【题目描述】

https://atcoder.jp/contests/agc004/tasks/agc004_d。

给定一棵内向树，问至少改变多少个点的父亲，才能使得每个点的深度都小于等于 k。$n \leq 10^5$。

【题解】

直接从下向上考虑，不能不断了就断，这样显然最优。

如果点带权、每个点的深度限制不同怎么做？我们直接维护 $dp_{u,i}$ 表示 u 子树，u 的深度为 i 时的最小花费。为了减小转移的复杂度，可以直接维护差分数组，显然都属单增的；把 u 接到根上，也就是在其 dp 数组的末尾弹掉一些差分位置。

map + 启发式合并即可，$O(n \log^2 n)$。

【提交记录】

https://atcoder.jp/contests/agc004/submissions/35982098。

【AGC038E】Gachapon

【题目描述】

https://atcoder.jp/contests/agc038/tasks/agc038_e。

有一个随机数生成器，生成 $[0,n-1]$ 之间的整数，其中生成 i 的概率为 $\frac{A_i}{S}$，其中，$S=\sum A_i$。

这个随机数生成器不断生成随机数，当 $\forall i\in[0,n-1]$，i 至少出现了 B_i 次时，停止生成，否则继续生成。

求期望生成随机数的次数，输出答案对 998244353 取模的结果。

$A_i,B_i\ge 1$，$\sum A_i,\sum B_i,n\le 400$。

【题解】

直接枚举 i 是最后填满的，写出这种情况的生成函数：

$$F=\prod_{j\neq i}\left(e^{\frac{A_j}{SA}x}-\sum_{k=0}^{B_j-1}\left(\frac{A_j}{SA}\right)^k\frac{x^k}{k!}\right)\cdot\left(\frac{A_i}{SA}x\right)^{B_i-1}\cdot\frac{1}{(B_i-1)!}$$

我们可以将其看作是关于 $e^{\frac{1}{SA}x}$ 的多项式，每项的系数是一个关于 x 的多项式，直接用二维多项式乘法和除法即可维护。

而最后对于某一项 $e^{ax}\cdot x^b$，我们要求的是 $\sum_{i=0}^{+\infty}a^i\cdot(i+1)^{\bar{b}}$，可以先将 $(i+1)^{\bar{b}}$ 展开，变成求 $\sum_{i=0}^{+\infty}a^i\cdot i^j$。

这个东西的求法（感谢 18Michael!!!）是，设 $f(a,j)$ 为那一串，那么作差：

$$\begin{aligned}f(a,j)-a\cdot f(a,j)&=\sum_{i=0}^{+\infty}a^i\sum_{l=0}^{j-1}i^l\cdot(-1)^{i-j+1}\cdot\binom{j}{l}\\&=\sum_{l=0}^{j-1}\cdot(-1)^{i-j+1}\binom{j}{l}\cdot f(a,l)\end{aligned}$$

于是就行了！还有再预处理出 $F(a,j)=\sum_{i=0}^{+\infty}a^i\cdot(i+1)^{\bar{b}}$ 便可以将复杂度做到 $O(n^3)$。

【提交记录】

https://atcoder.jp/contests/agc038/submissions/36010199。