

【CERC2017】Buffalo Barricades

【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/P4737>。

第一象限上有一些整点表示牛。接下来依次来了一些人，每个人放下一个树桩，然后从这个树桩向上向左延伸地建栅栏，直到碰到其它栅栏为止。问每个树桩在刚建成的时候它左下方向包住了多少只牛。牛和人的数量分别小于等于 3×10^5 。

【题解】

一种办法是，我们用一个平衡树维护每个区域内的牛和未来要放下的树桩，每次放下新树桩时，找到其对应的区域，并进行启发式分裂。平衡树可以按照 x 排序，先把横坐标太大不可能被包住的部分 split 出去，然后在剩下的部分中，每次去掉一个最大值和一个最小值，直到剩下的点全部被包住或全不被包住为止，这样做时间复杂度为 $O(\min(a, b))$ ，总复杂度也就是 $O(n \log^2 n)$ 。

另一种办法是，从上到下扫描线，维护当前还存在竖线，那么每次加入新树桩都属把它左侧时间比其晚的一个连续后缀去掉；最后变成一个合并问题就行。

【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/89790717>。

【CF1693D】Decinc Dividing

【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1693D>。

定义一个序列 a 是好的，仅当可以通过删除 a 的一个单调递减子序列（可以为空）使得 a 单调递增。给定一个 $1 \sim n$ 的排列 p ，你需要求出 p 有多少子段是好的。 $n \leq 2 \times 10^5$ 。

【题解】

注意到如果不存在 $3\ 4\ 1\ 2$ 或者 $2\ 1\ 4\ 3$ 这样的子序列，就一定合法。构造的话，直接提取出区间的 LIS 即可。

对于每个 3，求出其后面最近的 4；对于每个 2，求出其前面最近的 1，然后从右到左扫描线，扫到一个 1 就把对应其的 2 全加进去，遇到一个 4 就把它对应的 3 全拿出来在树状数组上查询一个后缀最大值，就能找到所有的 $3\ 4\ 1\ 2$ 。

找到所有 ban 掉的区间 $[l, r]$ ，然后双指针找到每个 l 能延伸到的最大的 r 即可。 $O(n \log^2 n)$ 。

【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/90355912>。

【P7482】不条理狂诗曲

【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/P7482>。

YSGH 有一个长度为 n 的非负整数序列 a ，定义 $f(l, r)$ 表示从 a 序列的区间 $[l, r]$ 选择若干不相邻的数的和的最大值。 $n \leq 2 \times 10^5$ 。

YSGH 想知道 $\left[\sum_{l=1}^n \sum_{r=l}^n f(l, r) \right] \bmod (10^9 + 7)$ 。

【题解】

考虑分治，对于分治中线的左右两侧，求出取了 mid 和没有取 mid 的两种后缀最大值，记为 (f, g) ，然后两侧分别按照 $f - g$ 排序，然后双指针一下即可。

【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/90460076>。

「C.E.L.U-02」苦涩

【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/P7476>。

YQH 的脑中可以被分成 n 个片区，每个片区相当于一个存放记忆的可重集，初始为空。他将进行 m 次这三种操作：

1. 区间 $l \sim r$ 的片区中都浮现了一个苦涩值为 k 的记忆。
2. YQH 开始清理 $l \sim r$ 片区的记忆。如果一个片区 $k \in [l, r]$ 且 k 中苦涩值最大的记忆与 $l \sim r$ 片区中苦涩值最大的记忆相等，则将这个苦涩值最大的记忆忘记。如果在同一个片区有多个相同的苦涩值最大的记忆，则只忘记一个。如果这些片区内没有记忆，则无视。

3. YQH 想知道, $l \sim r$ 片区中苦涩值最大的记忆的苦涩值是多少, 如果不存在, 输出 '-1'。
 $n \leq 2 \times 10^5$ 。

【题解】

用线段树套堆来维护, 每个结点维护一个最大值, 再开一个堆维护当前还没下传的堆。

遇到一个点, 如果它的最大 tag 等于目标区间的最大值, 那就将它下传; 如果当前区间被目标区间完全包含, 若它的最大 tag 恰好等于目标最大值, 那就 pop; 否则, 暴力递归下去删并剪枝。

根据势能分析, 时间复杂度为 $O(n \log^2 n)$ 。

【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/90466798>。

【JSOI2016】无界单词

【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/P5770>。

对于一个单词 S , 如果存在一个长度 l , 满足 $0 < l < |S|$, 并且使得 S 长度为 l 的前缀与 S 长度为 l 的后缀相同, JYY 则称 S 是有界的。比如 'aabaa' 和 'ababab' 都是有界的字符串。如果一个单词不存在这样的 l , 则 JYY 称之为无界单词。

现在考虑所有仅由字母 'a' 和 'b' 组成的长度为 $N(N \leq 64)$ 的字符串, JYY 想知道:

1. 一共有多少个无界单词?
2. 这些无界单词中, 按字典序排列第 K 小的单词是哪一个?

【题解】

二分, 变成求字典序小于等于 mid 的无界单词有多少个; 枚举在哪一位开始严格小于, 然后用那个经典的枚举最短 border (最短 border 小于等于一半) 即可。 $O(64^5)$ 。

事实上, 我们可以从高到低位逐位确定, 就直接变成了固定某个前缀, 任意后缀, 问无界单词的个数; 而 dp 所需要的信息可以通过 kmp 和 z 函数求出, 总复杂度可以降至 $O(64^3)$ 。

【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/90599280>。

【HNOI2014】江南乐

【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/P3235>。

游戏的规则：给定一个数 F ，游戏包含 N 堆石子，小 A 和他的对手轮流操作。每次操作时，操作者先选定一个不小于 2 的正整数 M ，指定一堆数量不小于 F 的石子分成 M 堆，并且满足这 M 堆石子中石子数最多的一堆至多比石子数最少的一堆多 1。当一个玩家不能操作的时候，他就输掉。问谁会获胜？每堆石子的数量小于等于 10^5 。

【题解】

考虑一堆石头会转移到哪些状态，注意到 $M \leq 10^{2.5}$ 时，总的方案数当然在 $10^{2.5}$ 级别；当 $M > 10^{2.5}$ 时，每堆石头的总数也都小于等于根号，可以直接枚举 $x = \lfloor \frac{N}{M} \rfloor$ ，然后判断 $N - xy$ ($y \in [\frac{N}{x}, \frac{N}{\lfloor \frac{N}{x} \rfloor}]$) 的奇偶性。

总复杂度 $O(V^{1.5})$ 。

【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/90607712>。

【JLOI2014】镜面通道

【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/P3260>。

在一个二维平面上，有一个镜面通道，由镜面 AC, BD 组成， AC, BD 长度相等，且都平行于 x 轴， B 位于 $(0, 0)$ 。

通道中有 n 个外表面为镜面的光学元件，光学元件 α 为圆形，光学元件 β 为矩形（这些元件可以与其他元件和通道有交集，具体看下图）。光线可以在 AB 上任一点以任意角度射入通道，光线不会发生削弱。当出现元件与元件，元件和通道刚好接触的情况视为光线无法透过（比如两圆相切）。

现在给出通道中所有元件的信息 (α 元件包括圆心坐标和半径 x_i, y_i, r_i , β 元件包括左下角和右上角坐标 x_1, y_1, x_2, y_2), 请求出至少拿走多少个光学元件后, 存在一条光线线路可以从 CD 射出。

【题解】

首先猜想只要左侧和右侧连通就一定能找到光路。那么我们对每个原件建一个点, 记底部为 S , 顶部为 T , 在有相交或相切的两个元件之间连边, 那么问题就转化为了点最小割。

把每个点拆成两个点 (之间为容量 1 的边), 每条边拆成两条边 (容量 $+\infty$) 即可。

【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/90628002>。

【SDOI2016】平凡的骰子

【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/P4080>。

这是一枚平凡的骰子。它是一个均质凸多面体, 表面有 n 个端点, 有 f 个面, 每一面是一个凸多边形, 且任意两面不共面。将这枚骰子抛向空中, 骰子落地的时候不会发生二次弹跳 (这是一种非常理想的情况)。

你希望知道最终每一面着地的概率。

【题解】

首先我们如何求出重心的位置? 对于多边形, 我们可以三角剖分, 三角形的重心就是三点的平均点, 然后加权平均得到总的重心; 对于多面体, 我们可以四棱锥剖分, 四棱锥的重心就是四点的平均点, 总质量等比于体积可以用行列式算出来, 然后求加权平均。

然后对于每一面, 三角剖分成三角形, 然后用题面中的公式算出每个三角形对应的球表面积, 求出总的那一面对应的球表面积。对于公式中二面角的求值, 可以找两个向量外积得出一个面的法向量, 然后用内积求出两个法向量之间的夹角。

复杂度线性于输入。

【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/90962381>。

【SDOI2016】平凡的骰子

【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/P4080>。

这是一枚平凡的骰子。它是一个均质凸多面体，表面有 n 个端点，有 f 个面，每一面是一个凸多边形，且任意两面不共面。将这枚骰子抛向空中，骰子落地的时候不会发生二次弹跳（这是一种非常理想的情况）。

你希望知道最终每一面着地的概率。

【题解】

首先我们如何求出重心的位置？对于多边形，我们可以三角剖分，三角形的重心就是三点的平均点，然后加权平均得到总的重心；对于多面体，我们可以四棱锥剖分，四棱锥的重心就是四点的平均点，总质量等比于体积可以用行列式算出来，然后求加权平均。

然后对于每一面，三角剖分成三角形，然后用题面中的公式算出每个三角形对应的球表面积，求出总的那一面对应的球表面积。对于公式中二面角的求值，可以找两个向量外积得出一个面的法向量，然后用内积求出两个法向量之间的夹角。

复杂度线性于输入。

【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/90962381>。

【JOISC 2021 Day3】ビーバーの会合 2

【题目描述】

<https://www.luogu.com.cn/problem/P7565>。

给定一棵有 N 个点的树，每一个点上有一人，这些人要开秘密会议。

假设一次秘密会议有 P 个人参加，这 P 个人分别在第 p_1, p_2, \dots, p_P 个点上。如果点 k 满足下面这个值最小 ($d(a, b)$ 为点 a 到点 b 的距离， k 不需要满足 $k \in \{p_1, p_2, \dots, p_P\}$):

$$\sum_{i=1}^P d(k, p_i)$$

那么就称第 k 个点为可期待的，这场会议的期待值即为所有点中可期待点的个数。

对于每个 $j \in [1, N]$ ，求当会议里有 j 个人的时候，会议的期待值的最大值是多少。
 $N \leq 2 \times 10^5$ 。

【题解】

首先相当于找到一条极长的链，满足其两侧子树大小的 $\min \times 2$ 能达到参会人数。我们在启发式合并的过程中维护，考虑重 $<$ 轻、重 $>$ 轻、轻 $<$ 轻、重 $<$ 祖先、重 $>$ 祖先、轻 $<$ 祖先、轻 $>$ 祖先等情况，结合离线建线段树处理重儿子的方法就可以 $O(n \log^2 n)$ 。

实际上我们只要按照 $\min(sz, n - sz)$ 从小到大加入边，维护每个连通块的直径（合并直径可以枚举六种搭配）即可 $O(n \log^2 n)$ 。

【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/89241848>。

【CERC2013】Captain Obvious and the Rabbit-Man**【题目描述】**

<https://www.luogu.com.cn/problem/P7016>。

定义 $p_i = \sum_{j=1}^k a_j \times F_j^i$ 。现在给定 k, m 以及 $\{p_i\}_{i=1}^k$ ，请求出 $p_{k+1} \bmod m$ 。（ F 为斐波那契数列）。

【题解】

这玩意显然是要你用 $p_{1 \sim k}$ 线性表出 p_{k+1} ，有一种很神仙的构造是另 $A(x) = \prod_{i=1}^n (x - F_i)$ ，然后把 $1, 2, 3, 5, \dots$ 带进去并求和。

比较能做的做法是，这个玩意是一个范德蒙德矩阵，而范德蒙德矩阵的逆矩阵有个式子，可以通过 dp 得出。

【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/89748940>。

【CF898E】Mod Mod Mod**【题目描述】**

<https://www.luogu.com.cn/problem/CF889E>。

$$f(x, n) = x \bmod a_n$$

$$f(x, i) = (x \bmod a_i) + f(x \bmod a_i, i + 1)$$

给出 a 序列，当 x 取遍所有非负整数时 $f(x, 1)$ 的最大值。 $n \leq 2 \times 10^5, a_i \leq 10^{13}$ 。

【题解】

注意到一个 x 最多被操作 $\log_2(a)$ 次。而这个 x 一定会使某个 x_i 恰好顶到 $a_i - 1$ 。

如果枚举这个 $a_i - 1$ 是在哪里顶到的，那后半部分的贡献相当好计算，但是前半部分的贡献我们发现很难计算，甚至可能需要一个 dp。

所以我们还是考虑正着做，考虑一个 x 在前 i 个的贡献和为 $g(x, i)$ ，另 $x \leftarrow x - 1$ ，则 $g(x, i) \leftarrow g(x, i) - i + ???$ 。我们不妨把 ??? 放缩掉，因为它会产生 ??? 时，也就对应了那个 x_i 恰好为 $a_i - 1$ 。

于是我们就可以定于一个 dp 数组 h ，记 $h_{i,R}$ 表示 $x_i = R$ 时， $g(x, i) - ik$ 这个一次函数的最大一次项是多少。只做这两种转移：1. 对于 $R > a_{i+1}$ ，转移向 $R \bmod a_{i+1}$ ；2. 对于 $R = a_{i+1} - 1$ ，从大于等于它的第一个值转移来；而对于 $a_{i+1} < R$ ，其一次项显然不变。

这个 dp 数组可以涵盖所有需要的 dp 值，也就依赖于上两段中的那个性质。 $O(n \log^2(a))$ 。

【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/89943431>。

Nim 积

【题目描述】

<https://loj.ac/p/179>。

对于两个非负整数 x, y 我们定义其 Nim 积 $x \otimes y$ ：

$$x \otimes y = \text{mex}\{(a \otimes b) \oplus (a \otimes y) \oplus (x \otimes b) \mid 0 \leq a < x \wedge 0 \leq b < y\}$$

生成的数据均在 2^{32} 范围以内，故保证 $0 \leq x, y < 2^{32}$ 。四组数据中的 T 分别为 $10, 1000, 3 \times 10^4, 3 \times 10^7$ 。

【题解】

有以下几个关键性质：

$$2^{2^k} \otimes x = 2^{2^k} \cdot x (x < 2^{2^k}) 2^{2^k} \otimes 2^{2^k} = \frac{3}{2} 2^{2^k}$$

根据分配律，将 $x \otimes y$ 拆成 \log^2 个 $2^{x'} \otimes 2^{y'}$ ，再将 $2^{x'} \otimes 2^{y'}$ 拆成： $(\prod 2^{2^{x_i}}) \otimes (\prod 2^{2^{y_i}})$ 。

考虑若 x' 和 y' 的最高位相同，那么答案 \otimes 上 $\frac{2}{3} 2^{2^{\text{highestBit}}}$ ；否则，答案 \otimes 上 $2^{2^{\text{highestBit}}}$ 。递归下去计算即可。

为了加速，我们可以预处理出所有 x 中的 4 位和 y 中的 4 位的 Nim 积，即可做到单次 $O(16)$ 。

【提交记录】

<https://loj.ac/s/1608964>。

【北京市选集训 2019】图的难题**【题目描述】**

<https://www.luogu.com.cn/problem/P5295>。

书上画出了一张无向图，要求把边染成黑白两色，要求所有白色边构成的子图没有环，且所有黑色边构成的子图没有环。小 D 无论怎样尝试都觉得书上的问题没有解，她想请你帮她确认一下。

【题解】

我们大胆猜想如果每张导出子图都满足边数小于等于 $2 \times$ 点数 -2 ，那么就一定有解。问题就变为了一个最大非空闭合子图问题。

可以强制某个边满流并多次跑最大流来完成；也可以通过退流，以不增加的时间复杂度完成此问题。

【提交记录】

<https://www.luogu.com.cn/record/90388457>。

「CCO 2018 Day2」Flop Sorting

【题目描述】

<https://loj.ac/p/3519>。

给定一个 1 到 N 的排列 a_i ，我们规定一次「翻牌」操作表示交换一个区间的最小值与最大值的位置。现在给定你 Q 次翻牌操作，每次对 $[l, r]$ 执行翻牌操作，求进行 Q 次翻牌操作后的最终序列。

现在给定了 N ，初始序列 a_i 和最终序列，求中间要进行的翻牌操作。 $1 \leq a_i \leq N \leq 4096$ ， $1 \leq Q \leq 3 \times 10^5$ 。

【题解】

写了个乱搞做法，摠 \ddagger ， \ddagger 不过去啊。

正解考虑归并排序，但是这个归并相当难归并，我们考虑再用一个类似归并形状的东西来处理归并——把左区间的后缀翻转，右区间的前缀翻转，使得中间它们正好接上；然后把它们一起翻转，然后就变成了左边的两个有序数列和右边的两个有序数列的归并。

据说时间复杂度是 $O(n \log n)$ ，但我不会证，而且莫名其妙地拿了最优解。

【提交记录】

<https://loj.ac/s/1609113>。