行百里者半九十。

【CF1696G】Fishingprince Plays With Array Again

【题目描述】

https://www.luogu.com.cn/problem/CF1696G。

定义关于两个参数 X，Y 的对于序列 a 的函数 $f(a)$：

你可以对序列从 1 开始长度为 n 的 a 进行以下两种操作：（t 可以是小数）

- 在位置 i $(1 \le i < n)$ 花费 t 秒，使 $a_i \leftarrow a_i - Xt, a_{i+1} \leftarrow a_{i+1} - Yt$。
- 在位置 i $(1 \le i < n)$ 花费 t 秒，使 $a_i \leftarrow a_i - Yt, a_{i+1} \leftarrow a_{i+1} - Xt$。

$f(a)$ 为通过上述两个操作使得 a 序列中所有元素小于等于 0 所需要花费的最小时间。给定参数 X，Y 与序列 a，每次进行下列两个操作中的一个：

- ‘1 k v‘ 将 a_k 变为 v。
- ‘2 l r‘ 将 a 序列中 $[l, r]$ 区间范围内的元素以原顺序取出作为序列 b，求 $f(b)$。

$n, q \le 2 \times 10^5$。

【题解】

设 b_i 和 c_i 表示 i 位置处进行的两种操作的次数，那么可以列出其线性规划形式：

$$\begin{cases} \text{minimize} \sum b_i + \sum c_i \\ \forall i, Xb_{i-1} + Yb_i + Xc_i + Yc_{i-1} \ge a_i \end{cases}$$

将其对偶，可以得到：

$$\begin{cases} \text{maximize} \sum d_i \cdot a_i \\ \forall i, Xd_{i-1} + Yd_i \le 1 \\ \forall i, Yd_{i-1} + Xd_i \le 1 \end{cases}$$

由于线性规划的性质可以得出，d 要么是 0，要么是 $\frac{1}{X+Y}$，要么是 $1 + \frac{1}{\max(X,Y)}$，线段树维护矩阵连乘积即可。

【提交记录】

https://www.luogu.com.cn/record/87864174。

【CF1276F】Asterisk Substrings

【题目描述】

https://www.luogu.com.cn/problem/CF1276F。

给定一个字符集为小写字母的长度为 n 的字符串 s，设 t_i 表示将 s 中的第 i 个字符替换为特殊字符 * 时得到的字符串，比如当 $s = \text{abc}$ 时，$t_1 = \text{*bc}$，$t_2 = \text{a*c}$，$t_3 = \text{ab*}$。

求字符串集合 $\{s, t_1, t_2, t_3, ..., t_n\}$ 中本质不同的子串个数（需要计算空串）。

注意 * 仅表示一个字符，不表示其他含义（如通配符）。$|s| \le 10^5$。

【题解】

我们考虑有经过 * 的子串种类数量，设 $f(S, T)$ 表示 S*T 能否达到，不难发现 S 和 T 可以用后缀树或者前缀树上的结点来代替，那么 f 的定义域大小就是 n^2 级别的。

枚举 * 的位置，每次相当于把后缀树和前缀树上分别的一条到根的路径上的点 (u, v) 两两之间的 $f(u, v)$ 设为 1；我们最后就是要统计 1 的个数。

每个前缀树上的点，可以和它匹配的一定是一个后缀树的包含根的连通子树；我们考虑用启发式合并来维护这些子树的边权和——用 set 维护点集的 dfn 序，即可求出所有边的边权和。总复杂度 $O(n \log^2 n)$。

【提交记录】

https://www.luogu.com.cn/record/87885905。

P5115 Check,Check,Check one two!

【题目描述】

https://www.luogu.com.cn/problem/P5115。

现在给定一个长度为 $n \le 10^5$ 的字符串，希望您求出

$$\sum_{1 \le i < j \le n} lcp(i, j) lcs(i, j) [lcp(i, j) \le k_1][lcs(i, j) \le k_2]$$

【题解】

首先先转化到两棵树上为树上 lca 相关的问题。

一种比较勇猛的做法是，设一条边的权值为：当两端的深度都小于等于 k 时，权值为边长；当一端深度小于等于 k 时，边权为 $\min(dep_u, dep_v)$；否则边权为 0。

对于每个 1 树上的点 u，求出它子树内的点对在第二棵树上的贡献和，乘上 (u, fa_u) 的边权贡献进答案。在第二棵树上可以用全局平衡二叉树快速维护加点删点求总贡献，第一棵树上进行一个配套的 dsu on tree 即可。$O(n\log^2 n)$。

实际上有 $26n$ 做法，大概是考虑 $[j-lcs, j+lcp]$ 和 $i-lcs, i+lcp$ 是一样的，所以不妨考虑某个后缀树上的结点 T 的贡献。时代变了啊！

【提交记录】

https://www.luogu.com.cn/record/87938469。

【CF1060G】Balls and Pockets

【题目描述】

https://www.luogu.com.cn/problem/CF1060G。

给出一个无限长的序列 $p_0, p_1, p_2, \ldots$，初始 $p_i = i$。

给出 n 个互不相同的整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，可以对序列 p 做以下操作若干次：将序列 p 的第 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 项从序列 p 中删掉，然后将剩余的数字按照原来在序列 p 中的顺序重新排列作为新的序列 p。

给出 m 组询问，每组询问给出两个整数 x, k，询问进行 k 次操作后的序列 p 中 p_x 的值。

【题解】

这个变化过程非常复杂，我没有办法发现足够理想的性质，于是就得从比较生猛的维护去考虑。

手玩足够的数据，并将每次删除的映射画出来看看，考虑这么求一个询问的答案，令 $f(x) = x + \sum_i [a_i - i + 1 \le x]$，那答案就是 $f^{(k)}(x)$。

离线下来处理，从左到右维护每个 x 右移的过程，对于 $x \in [a_i - i + 1, a_i]$ 的 x 都可以一起处理，因为它们的增量是比较统一的。分成两种情况考虑：

- 对于 $a_i \ge a_{i+1} - i$，那么 $[a_i - i + 1, a_{i+1} - i]$ 间的询问都会加上 i，然后整体过度到 $a_{i+1} - i, a_{i+1}$ 的处理范畴内。
- 对于 $a_i < a_{i+1} - i$，一定可以分成两段，左边这段增加了 $(k+1)i$，右边这段增加了 ki，然后左边的这段跑到了右边的这段的右边。

我们拿一个平衡树维护这个过程，并维护子树剩余步数最小值，和坐标的整体平移；每当有剩余步数小于 0 时，我们就在平衡树上找到哪个点，并计算它的答案。复杂度

$O(n\log_2 n)$。

【提交记录】

https://www.luogu.com.cn/record/88269582。

P8056 C 图上的数

【题目描述】

https://www.luogu.com.cn/problem/P8056。

给定一个 n 个点 m 条边的无向图（保证无重边无自环但不保证连通），每条边有一个 $1\sim m$ 的互不相同的编号。

定义一条边是孤边，当且仅当它的两端点均已经被删除。

您需要给定一个删点顺序，令 P_i 表示第 i 条变成孤边的边的编号，您需要最小化 P_i 的字典序。

若某一时刻存在多条边变为孤边，我们认为，编号小的边先变为孤边。$n,m\le 10^6$。

【题解】

将边划分为 $0\sim 2$ 度三种。考虑贪心，每次的比较优的选择有两种：

1. 选择一个点删掉，这个点对应的 1 度的边的编号要被最小化。
2. 选择一条 2 度的边，删去它对应的两个点。

有了这个大方向，我们来考虑一些细节问题：

- 每次我们应该在两个操作中选一个比较小的进行。
- 若现在决定进行的 2 操作的两个端点都没有相邻的 1 度边，则可以以任意顺序删去这两点；存在一个端点有相邻的 1 度边，则先把那个空着的给删了，然后把另一个删了；若两个端点都有相邻的 1 度边，那么忽略这条边，因为两端点的决策都会被第一种贪心策略涵盖。
- 在某次删点操作中，它会删去所有和它相邻的 1 度边；但如果有这么一条 2 度边，它的另一个端点没有任何一条相邻的 1 度边，并且它插入后有利于缩小字典序，那么我们也顺便把这条边删掉，也把那个点删掉。

讲真我觉得这个正确性好感性啊，但是又想不出很好的证明。$O(n\log_2 n)$。

【提交记录】

https://www.luogu.com.cn/record/88386505。

【UR 19】通用测评号

【题目描述】

https://uoj.ac/problem/514。

有 n 个容量为 a 的燃料箱，每次随机选择一个没有满的燃料箱，将其内的燃料量加一，直到每个燃料箱的燃料量都大于等于 b 为止，问最后满的燃料箱的数量的期望。$n,a,b \le 250$。

【题解】

显然存在一个燃料箱，它会被填充恰好 b 次，且最后一次填充的是它；不妨假设这就是燃料箱 1，它的作用是 $b-1$ 次操作会被排列进其它燃料箱的填充序列里；而其它燃料箱彼此之间相对独立。

一个错误的想法是，用二元生成函数，多加一维 y 表示满的燃料箱，将 y 带入 $1+y$，na^2 多项式快速幂即可，最后的 0 次项是总数，1 次项的贡献和，贡献和除以总数得出期望。

但是事实上，每种方案的概率不是均等的！只能通过概率乘以贡献的方式来算期望。

注意到一开始的概率都是 $\frac{1}{n}$，随后每填满一个燃料箱，概率就变成 $\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \cdots$。我们进行一个 dp，设 $f_{i,j}$ 表示前 i 个操作，填满了 j 个燃料箱，的对应方案，要乘上的概率的大小的和：

$$f_{i,j} \cdot \frac{1}{n-j} \to f_{i+1,j}$$

$$f_{i,j} \cdot \frac{1}{n-j} \cdot (n-j-1) \cdot \binom{i-ja}{b-1} f_{i+1,j+1}$$

而其它没有满的燃料箱的贡献，可以通过 EGF 累乘来计算。复杂度 $O(n^2 a \log(na))$。

【提交记录】

https://uoj.ac/submission/585682。

【UR 17】滑稽树前做游戏

【题目描述】

https://uoj.ac/problem/372。

$x_1, x_2, ..., x_n$ 为 n 个独立随机变量，且均服从 $[0,1]$ 上的均匀分布。给出 m 对关系 (a_i, b_i)，令 $f(x) = \max(\max_{i=1}^{n} x_i, \max_{i=1}^{m}(x_{a_i} + x_{b_i}))$，求 $f(x)$ 的期望。

$n \le 30$，对 998244353 取模。

【题解】

首先，期望转为 $2-\int dx\cdot$ 小于等于 x 的概率。设 $f(G,y,t)$ 表示，图 G 上，每个点的权值都要小于等于 y，且任意两点的和都小于等于 t 的概率。此处要求 $y \in [\frac{t}{2}, t]$。

分类讨论：若所有的点的权值都小于 $\frac{t}{2}$，那么一定都合法；若存在点的权值大于等于 $\frac{t}{2}$，则我们枚举其最大值取的点 u，那么对于任意一个和 u 相邻的点 v，$x_v \le t-x_u$；可以发现这些点 v 被删除后，答案不变。设这张图被删去 u 和 $\{v\}$ 后分裂成了连通子图 $G_{u,1\sim k}$，有：

$$f_{G,y,t} = \left(\frac{t}{2}\right)^{|G|} + \sum_{u\in G}\int_{x=\frac{t}{2}}^{y} dx\cdot(t-x)^{|\{v\}|}\cdot\prod f\left(G_{u,i},x,t\right)$$

注意到 f 是一个关于 y 和 t 的 $|G|$ 次齐次多项式，并且这个 t 可以当作常数，只有 y 一直参与积分运算。我们把这个 dp 递归地进行下去并记忆化（不需要考虑图同构），那么这个玩意的复杂度就相当正确！

最后只要对 $f(G,\min(t,1),t)dt$ 积分即可。

【提交记录】

https://uoj.ac/submission/585272。

【UR 17】滑稽树上滑稽果

【题目描述】

https://uoj.ac/problem/370。

他有 n 个滑稽果，第 i 个滑稽果的大小为 a_i。

他现在想把它们构成一棵任意形态的有根树，每个点的滑稽度为它的大小和它父亲的滑稽度的 and。特别地，根的滑稽度等于他的大小。

为了世界的和平，他希望能最小化这棵树上所有滑稽果的滑稽度之和。$n \le 10^5, a_i \le 2\times 10^5$。

【题解】

注意到字典序最小的结论是错误的（否则也不会出现在部分分里）。注意到每个数的贡献最多在 w 轮后就会收敛到所有数的交集。设 f_S 表示 S 前 i 个数的 and 为 S 的最小代价。那么可以 3^w dp，也即 $a_i^{\log_2 3}$。

【提交记录】

https://uoj.ac/submission/585117。

【2020-2021 Summer Petrozavodsk Camp, Day 6: Korean Contest】Oneness

【题目描述】

https://codeforces.com/gym/102155/problem/E。

给定一个随机产生的高精度数 $x \le 10^{2.5\times 10^5}$，求：

$$\sum_{i=1} \left\lfloor \frac{x}{1111...1(i\ 1s)} \right\rfloor$$

【题解】

首先求出：

$$\sum_{i=1} \frac{x}{1111...1(i\ 1s)}$$

以调和级数的复杂度求出 $\sum_{i=1} \frac{1}{1111...1(i\ 1s)}$，然后 NTT 即可。然后要减去：

$$\sum_{i=1} \left\{ \frac{x}{1111...1(i\ 1s)} \right\}$$

注意到：

$$\left\{ \frac{x}{1111...1(i\ 1s)} \right\} = \left\{ \sum_{j=1} \left\{ \frac{9}{10^{ij}} \cdot x \right\} \right\}$$

那么我们只要处理出所有 $\left\{\frac{x}{10^k}\right\}$ 即可。最后，对于过于接近整数的中间结果，调用一次高精度除法即可；由于数据随机，所以最多调用 $O(1)$ 次除法。

【提交记录】

狗屎出题人卡我 10^{-11} 级别的精度，狗屎。

【2020-2021 Summer Petrozavodsk Camp, Day 6: Korean Contest】Koosaga's Problem

存疑！存疑！

本场的 https://codeforces.com/gym/102155/problem/D 和 https://codeforces.com/gym/102984/p
保留作模拟赛题目（看到这里的你，不要点进去哦）。