## D5.T1 CodeForces - 1411G

**题意：**

> 有个 $n$ 个点 $m$ 条边的有向无环图。
>
> 每次在范围 $[1, n+1]$ 内随机一个整数 $v$，如果 $v \le n$ 则在结点 $v$ 上放一个石子，否则停止这个过程。
>
> 过程结束后，两人在这个 `DAG` 上玩组合游戏，每次选一个石子向出边移动，不能移动者输。
>
> 问先手赢的概率。**数据范围：**$1 \le n \le 100000$，$0 \le m \le 100000$。

**题解：**

我们可以轻松预处理出每个点的 `SG` 值，那么总的 `SG` 值就是选出的点的 `SG` 值的异或值，题目就转化为了求这些点的异或值为 $0$ 的概率。

设 $f(S)$ 表示当前局面是 $S$ 时先手失败的概率，则 $f(S) = \frac{1}{r_S}(\sum p_T \cdot f(T)) + \frac{1}{n+1}[S=0]$，高斯消元即可。

考虑更快的做法，定义一种新的幂级数——集合幂级数 $f(z) = \sum F_X \cdot z^X$，定义它的运算为：

$$f(z) + g(z) = \sum_X (F_X + G_X) \cdot z^X, \quad f(z) \times g(z) = \sum_{X,Y} (F_X \cdot G_X) \cdot z^{X \oplus Y}$$

实际上我们也可以用 `FMT` 和内积来定义它的乘法。那么怎么在这题中使用呢？

设 $f(z) = \sum_X \frac{cnt_X}{n+1} z^X$，那么答案的生成函数就是：

$$\frac{1}{n+1}(1 + f + f^2 + f^3 + \cdots) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-f}$$

大力求逆就行了。怎么求逆呢？考虑到集合幂级数相对于形式幂集数的特有的性质——有限环，那么我们把它 `FMT` 一下，每一位分别对于除法取反，最后转回来。

复杂度：$N + \sqrt{N} \log N$，评测链接：**AC Submission**。

## D5.T2 CodeForces - 1458D

**题意：**

> 有个 `01` 串 $s$。你可以选择一段 $0$ 和 $1$ 个数相同的子串，然后把它 `reverse` 了，再把它其中的 $0$ 变成 $1$，$1$ 变成 $0$。这个操作可以执行任意多次。求可以获得的字典序最小的 $s$。**数据范围：**
> $1 \le |s| \le 500000$。

**题解：**

**相同的个数 -> 自然能够想到一个 Trick**，把 $0$ 替换成 $-1$，求出前缀和为 $s_i$，那么翻转一定是在相同的 $s$ 间翻转。

考虑图论建图，在点之间连双向边，翻转相当于从环的另一边绕回来，跑最小字典序欧拉路径即可。

时间复杂度：$O(n)$，评测链接：**AC Submission**。

### D3.T3 CodeForces - 1458E

**题意：**

> 新 Nim 游戏是一个**两堆石子**的 Nim 游戏，但是多了 n 个必败态。
>
> 分别用 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$ 一直到 $(x_n,y_n)$ 表示。其中 $(x_i,y_i)$ 就表示了当第一堆石子的数量为 $x_i$ 且第二堆石子的数量为 $y_i$ 时，就不能执行任何操作了，也就是这是个必败态。注意石子数量是有序的，如果第一堆石子数量为 $y_i$ 且第二堆为 $x_i$，那么不算必败态（除非有另一个 $(y_i,x_i)$ 的必败态）。
>
> 然后再给 $m$ 个询问 $(a_i,b_i)$，你需要回答当第一堆石子为 $a_i$ 个且第二堆石子为 $b_i$ 个时是必胜还是必败，如果必胜输出 `WIN` 否则输出 `LOSE`。
>
> **数据范围：**$1 \le n,m \le 100000$，$0 \le x_i,y_i,a_i,b_i \le 10^9$。