D4.T1 AtCoder - arc106_f

题意：

> 有这么一个 n 个点的无向图，第 i 个点上有 d_i 个洞，每条边可以连接两个不同的点的两个洞，必须保证每个洞只能被最多一条边连接。问这张图的生成树个数（一对洞在一棵树中有连边但在另一棵树中没有，就算不同的树），对 998244353 取模。

题解：

算是自己推到最后的第一道 `Prufer` 题目吧！设这颗树的 `Prufer` 序列为 c，则 `ans` 可以表示为：

$$Ans = \sum_{\sum c_i = n-2} \binom{n-2}{c_1, c_2, \cdots, c_n} \cdot \prod \frac{d_i}{(d_i - c_i - 1)!}$$

大力拆开并推一推：

$$\begin{aligned} Ans &= \sum_{\sum a_i = 2n-2} \frac{(n-2)!}{\prod (a_i - 1)!} \cdot \prod \frac{d_i!}{(d_i - a_i)!} \\ &= (n-2)! \prod d_i \sum_{\sum a_i = 2n-2} \frac{(d_i - 1)!}{(a_i - 1)! \cdot (d_i - a_i)!} \\ &= (n-2)! \prod d_i \sum_{\sum a_i = 2n-2} \prod \binom{d_i - 1}{a_i - 1} \end{aligned}$$

现在只要求最后面那个求和了，怎么求呢？组合意义即可（bushi）：

$$Ans = (n-2)! \prod d_i \binom{\sum d_i - n}{2n-2}$$

D4.T2 AtCoder - nomura2020_d

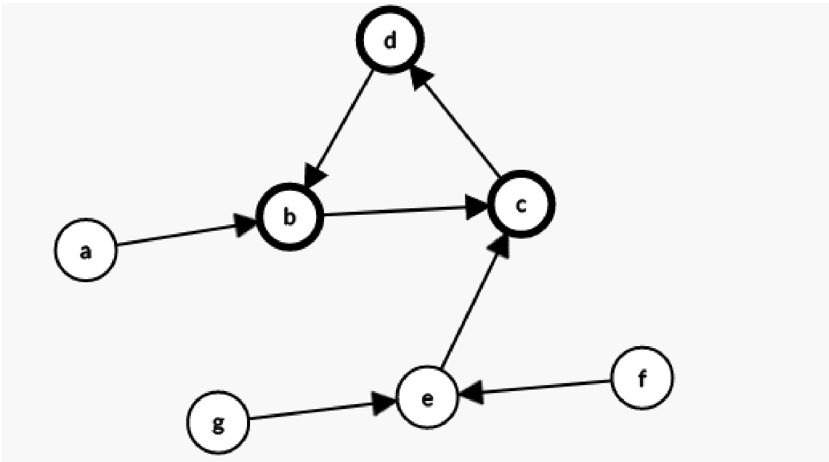
题意：

> 有这么一个 n 个点的无向图，每个点 i 喜欢另一个点 p_i，这意味着最终它们得在同一个连通分量内。一开始这张图没有边，确定了 p_i 后，你需要添加尽量少的边，以满足所有点的条件。但是这题太水了，所以加强一下：某些点的 p_i 为 -1，这意味着它还不确定喜欢哪个点，那你要帮它确定。假设 $p_i = -1$ 的点有 k 个，也就是有 $(n-1)^k$ 种选取方案，你需要对每种方案都计算出添加的尽量少的边数。答案对 $10^9 + 7$ 取模。

题解：

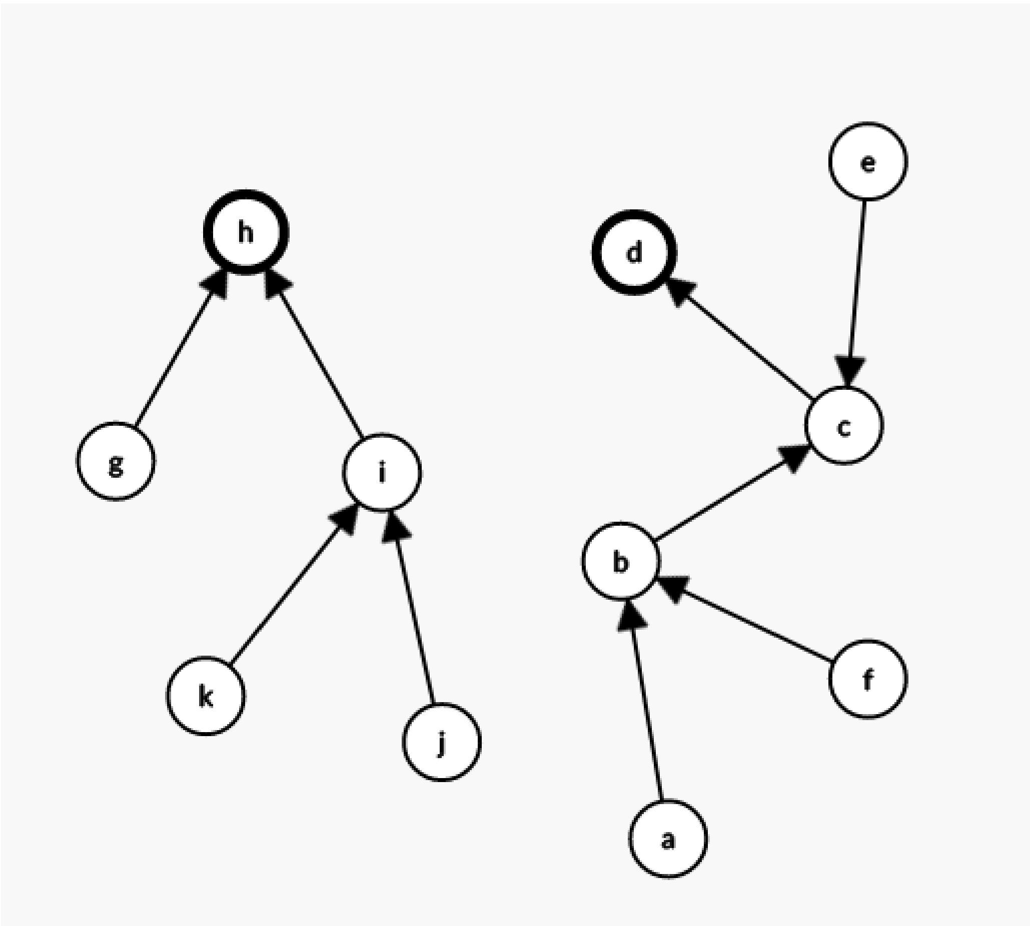
有一个重要的想法，就是最后形成的是基环树森林，**基环树森林的树的数量等于环的数量**。边数 = n - 连通块数量 = n - 环的数量，那么我们打算统计环的数量。

显然这张图由一些内向基环树和内向树，你要统计每种连边方案的环的个数的总和。先来看内向基环树：



假设有一条边连向 f 吧，那么可以发现一定不会有环！于是这颗树其实没有用，直接把答案加上 $(n-1)^k$ 就行了。

然后看这些内向树：



显然要从每个根，连向其他树的任意一个节点，在从另一个树的根节点连出去，转一圈，再连回来，就能形成环。现在问总的环的数量。统计就比较分别讨论每个环的贡献，如下：

$$Ans=\sum_{P\subseteq U}\left(\prod_{i\in P}sze_i\right)\cdot(|P|-1)!\cdot(n-1)^{|U|-|P|}$$

然后惯例换个形式就可以做到 $O(n\log n)$：

$$Ans=\sum_{|P|=1}^{|U|}(|P|-1)!\cdot(n-1)^{|U|-|P|}\cdot[z^{|P|}]\prod_{i\in U}(1+sze_i z)$$

后面这个式子取个 $\ln$，大力展开计算即可。

D4.T3 CodeForces - 1479D

题意：

> 有棵 n 个点的树，每个点上有个颜色 a_i。 q 次询问，每次给定 (u,v,l,r)，问路径 $(u\sim v)$ 上的，颜色编号在 $[l,r]$ 内的，出现奇数次的颜色。有的话输出任意一种满足条件的颜色编号，没有的话输出 -1。
> 数据范围：$1\le n,q\le 3e5$；$1\le a[i]\le n$；$1\le u,v\le n$；$1\le l\le r\le n$。 **注意看时限，5 秒。用你喜爱的乱搞爆过去吧。**

设 $f_{u,c}$ 表示 u 点到根的路径上颜色为 c 的数量，$g_{u,v,c}$ 表示链上的数量，则：

$$g_{u,v,c}=f_{u,c}+f_{v,c}-f_{\text{lca}(u,v),c}-f_{fa_{\text{lca}}(u,v),c}$$

由于只需要奇偶性，所以重复计算两部分的那个可以去掉：

$$g_{u,v,c}=f_{u,c}+f_{v,c}-[a[\text{lca}(u,v)]=c]$$

我们用可持久化线段树从根出发路径上颜色的桶（即 f），然后只需要找到 f_u 与 f_v 中一位不同的就可以了；在线段树的每个节点上维护一个哈希值，查询的时候递归进有区别的那个子树查询就行了。

复杂度：$O(n\log n)$。