

Problem 6~10

2021年10月12日 20:08

[\[2021-09-09 提高模拟赛\] 树的最大 k- 独立集问题 \(independent\)](#)

[\[2021-09-09 提高模拟赛\] 数字计数 \(count\)](#)

考虑暴力作法——用并查集维护所有数的相等关系，答案也就是 $10^{|\text{connected components}|}$ 左右。我们如何快速地维护这个并查集区间连接呢？这里有个经典做法：我们将并查集建出 $O(\log n)$ 层，第 k 层节点 i 代表 $[i, i + 2^k)$ 这个区间，两点连接相当于要求整个区间相同。显然每个限制条件都可以转化为这张分层图上的两条边。

我们从上到下传所有的边，显然上一层的每条边都可以拆成下一层的两条边；而有效的总边数每层都是 $O(n)$ 级别的，所有总的复杂度是 $\leq O(\log n \alpha(n))$ 事实上，我们不需要将图的复制那么多遍，只需要在上一层图的基础上再连接一些边即可，那总的复杂度显然是 $O(\log n + n\alpha(n))$

[\[2021-09-16 提高模拟赛\] 枯法者训练 \(withered\)](#)

求基 $\{a_i\} \subseteq N$ 不能表出的最小正整数。好题啊！对于 a_0 ，倘若 $sa_0 + t$ 可以表出，那么对于所有 $s' > s$ ， $s'a_0 + t$ 都是可以表出的。因此，这是一个同余最短路问题。

对于 a_0 个余数 q ，我们求出最小的 k 使得 $ka_0 + q$ 可以被表出。 $a_1 \sim a_{n-1}$ 都是作为边。直接 Dijkstra 肯定是不行的，观察得这是一个 01BFS，所以复杂度就是 $O(n|\max a_i|)$ 的了。

[\[2021-09-16 提高模拟赛\] 树的动态直径问题 \(diameter\)](#)

修改边权，动态维护树的直径长度。好题啊！维护这棵树的欧拉序，那么一个点到根的距离就可以表示为一个前缀和 sum_i ，于是有：

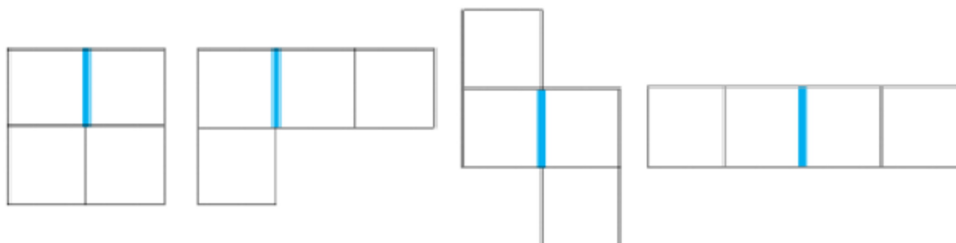
$$dis(u, v) = sum_u + sum_v - 2sum_{lca(u, v)}$$

事实上，我们有：

$$dis(u, v) = \max_{j \in [u, v]} sum_u + sum_v - 2sum_j$$

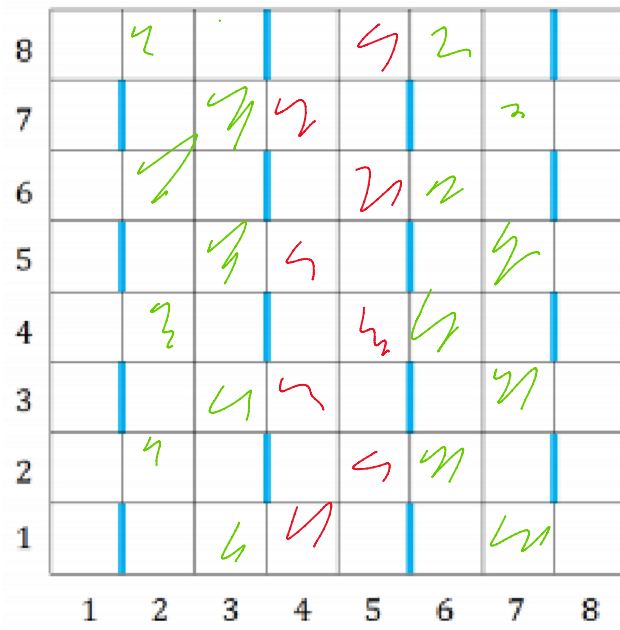
所以我们直接用线段树维护这个东西，同时维护一大堆东西，然后就 $O(n \log n)$ 了。

[\[2021-09-16 提高模拟赛\] Tweetuzki 的方块 \(block\)](#)



我们观察这张图，会发现——限制的形状，都是有关键边两侧的格子，外加两边各拓展一格构成。我们进行染色：





排斥关系只能在红色格子和绿色格子之间产生，因此这是一个二分图最大匹配问题。